Aufgabe 1

In einem Krankenhaus werden Patienten von drei verschiedenen Ärzten A, B und C behandelt. Arzt A behandelt 50%, Arzt B behandelt 20% und Arzt C 30% der Patienten. Unter den Diagnosen von Arzt A sind 3% falsch, von Arzt B sind 2% der Diagnosen falsch, und von Arzt C sind 5% der Diagnosen falsch.

a) Definieren Sie sinnvolle Ereignisse zur Bearbeitung der Aufgabe und formulieren Sie die gegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe dieser Ereignisse
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine in diesem Krankenhaus gestellte Diagnose falsch?
c) Gegeben, dass eine falsche Diagnose gestellt wird, mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt sie von Arzt A, B oder C?
d) Um die Diagnostik zu verbessern, kontrolliert neuerdings Arzt B die Diagnosen seiner Kollegen A und C, und entdeckt dabei 80% der falschen Diagnosen. Die Diagnosen von Arzt B werden nicht geprüft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird nach diesem neuen Verfahren eine falsche Diagnose gestellt?

Aufgabe 2

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markov-Kette auf dem Zustandsraum $\{1,2,3,4\}$ mit Übergangsmatrix

P =

1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

a) Skizzieren Sie den Übergangsgraphen. Ist die kette Irreduzibel?
b) Bestimmen Sie die Verteilung von X_2, falls $X_0 = 2$ ist.
c) Bestimmen Sie alle gegebenenfalls existierenden invarianten Verteilungen der Kette.
d) Was bedeutet das Ergebnis von (c) für das Langzeitverhalten der Kette, d.h. für $n \to \infty$? Erläutern Sie kurz (2-3 Sätze).

Aufgabe 3

Es sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$, welche das Ergebnis beim einmaligen Werfen eines fairen Würfels beschreibt. Es sei Y die Zufallsvariable auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum, welche gegeben ist durch:

$Y(\omega) =$

- $X(\omega)$ falls $X(\omega)$ gerade ist,
- 1 sonst

a) Bestimmen Sie die Verteilung von Y.
b) Sei nun $Z = 1_{\{X <= 4\}}$. Geben Sie in einer Tabelle die gemeinsame Verteilung von Y und Z an.
c) Bestimmen sie $E[Y]$ und $E[Z]$.
d) Bestimmen Sie $cov(Y, Z)$. Sind Y und Z unabhängig? Begründen Sie.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ und

f(x) =
$a * x^2$, wenn 0 <= x <= 1
b , wenn -1 <= x < 0
0 , sonst

a) Bestimmen Sie alle Paare von $a, b \in \mathbb{R}$, so dass es sich bei f um eine Dichte handelt.
b) Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von a und b, den Erwartungswert $E[X]$ der zugehörigen Zufallsvariablen X.
c) Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von a und b, die Verteilungsfunktion F_X.
d) Es sei nun b = 0. Skizzieren Sie f und markieren Sie in der Skizze die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{2})$.

Aufgabe 5

Es seien $U_i, i \in \mathbb{N}$ unabhängige, auf $[0, 1]$ uniform verteilte Zufallsvariablen.

a) Es seien $V_i := 1_{\{U_i \leq 1/4\}}$ und $X := min\{i : V_i = 1\}$. Welche Verteilung haben die V_i, welche Verteilung hat X?
b) Geben Sie mit Hilfe der Zufallsvariablen U_i einen Monte-Carlo-Schätzer für $\int_0^1 \pi\, sin(x)\, dx$ an.

c) Finden Sie eine Funktion g, so dass $Y_i := g(U_i)$ Pareto-verteilt zum Parameter $\alpha > 1$ ist, d.h. Die Verteilungsfunktion F von Y_i gegeben ist durch

$F(x) =$

$1 - x^{-\alpha}$ falls $x \geq 1$,

0 sonst