TU Berlin, Institut für Mathematik Prof. Dr. Noemi Kurt
SoSe 19 András Tóbiás

Stochastik für Informatik, (6LP)
Klausur

19. Juli 2019

Musterlösung für die Einsicht

Aufgabe 1.1 (gemeinsame Verteilung) *10 Punkte*

Eine Urne enthält 4 rote und 6 weiße Kugeln. Es wird zwei Mal mit Zurücklegen gezogen. X bezeichne die Anzahl er roten gezogenen Kugeln, Y die Anzahl der weißen gezogenen Kugeln.

(a) Geben Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y mit Randverteilung in einer Tabelle an.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$ und $\mathrm{cov}(X, Y)$. Sind X und Y unabhängig?

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}[e^{2X+Y}]$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 1.1.

(a)

X \ Y	0	1	2	p_X
0	0	0	0.36	0.36
1	0	0.48	0	0.48
2	0.16	0	0	0.16
p_Y	0.16	0.48	0.36	(1)

(b) $\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{2} k\mathbb{P}(X = k) = 0.48 + 2 \cdot 0.16 = 0.8$, $\mathbb{E}Y = \sum_{k=0}^{2} k\mathbb{P}(Y = k) = 0.48 + 2 \cdot 0.36 = 1.2$,
$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = 0,48 - 0,96 = -0,48$, denn $\mathbb{P}(XY = 1) = 1 - \mathbb{P}(XY = 0) = \mathbb{P}(X = Y = 1) = 0.48$ und damit $\mathbb{E}(XY) = 0.48$.
Da $\mathrm{cov}(X, Y) \neq 0$, sind X und Y nicht unabhängig.

(c) $\mathbb{P}(2X + Y) = 2 = \mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = 0.36$, $\mathbb{P}(2X + Y = 3) = \mathbb{P}(X = Y = 1) = 0.48$, $\mathbb{P}(2X + Y = 4) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = 0.16$. Daraus folgt $\mathbb{E}[e^{2X+Y}] = \sum_{k=2}^{4} e^k \mathbb{P}(2X + Y = k) = e^2 \cdot 0.36 + e^3 \cdot 0.48 + e^4 \cdot 0.16 \approx 21.04$

Aufgabe 1.2 *10 Punkte*

Von einer Kita wird abends jedes Kind wie folgt abgeholt, jeweils unabhängig von den anderen Kindern[1]. Das Kind wird mit 40% Wahrscheinlichkeit von seiner Mutter abgeholt, und mit 60% Wahrscheinlichkeit von seinem Vater. Falls die Mutter das Kind abholt, kommt sie mit 15% Wahrscheinlichkeit zu spät zur Kita. Falls der Vater das Kind abholt, kommt er mit 20% Wahrscheinlichkeit zu spät.

(a) Wie groß die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Kind zu spät von der Kita abgeholt wird?

(b) Falls ein bestimmtes Kind nicht zu spät von der Kita abgeholt wird, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es von seinem Vater abgeholt wird?

(c) Gegeben, dass zwei verschiedene Kinder von ihren Vätern abgeholt werden, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder zu spät abgeholt werden? Begründen Sie Ihre Aussage.

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines von zwei Kindern nicht zu spät von der Kita abgeholt wird?

---

[1] Wir machen die vereinfachende Annahme, dass jedes Kind genau einen Vater und eine Mutter hat, und es keine Geschwister gibt

Lösungsskizze zu Aufgabe 1.2.

(a) Sei P das Ereignis, dass der Papa das Kind abgeholt und S das Ereignis, dass das Kind zu spät abgeholt wird. Nach der Formel von der Gesamtwahrscheinlichkeit gilt

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S|P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(S|P^c)\mathbb{P}(P^c) = 0.4 \cdot 0.15 + 0.6 \cdot 0.20 = 0.06 + 0.12 = 0.18.$$

(b) Mit Bayes-Formel

$$\mathbb{P}(P|S^c) = \frac{\mathbb{P}(S^c|P)\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(S^c|P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(S^c|P^c)\mathbb{P}(P^c)} = \frac{0.8 \cdot 0.6}{0.8 \cdot 0.6 + 0.85 \cdot 0.4} = \frac{24}{41}.$$

(c) Seien P_1, P_2 die Ergebnisse, dass das erste bzw. das zweite Kind von seinem Papa abgeholt wird und S_1, S_2 die Ergebnisse, dass das erste bzw. das zweite Kind zu spät abgeholt wird. Dann ist $\mathbb{P}(S_1 \cap S_2 | P_1 \cap P_2)$ zu berechnen. Wegen Unabhängigkeit gilt

$$\mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) = \mathbb{P}(P_1)^2 = 0.36$$

und auch

$$\mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap P_1 \cap P_2) = \mathbb{P}((S_1 \cap P_1) \cap (S_2 \cap P_2)) = \mathbb{P}(S_1 \cap P_1)^2 = 0.12^2 = 0.0144.$$

Daraus folgt

$$\mathbb{P}(S_1 \cap S_2 | P_1 \cap P_2) = \frac{\mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap P_1 \cap P_2)}{P_1 \cap P_2} = \frac{0.0144}{0.36} = 0.04.$$

(d)

$$\mathbb{P}(S_1^c \cup S_2^c) = 1 - \mathbb{P}(S_1 \cap S_2) = 1 - \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(S_2) = 1 - \mathbb{P}(S_1)^2 = 1 - 0.18^2 = 1 - 0.0324 = 0.9676,$$

wobei wir die Unabhängigkeit und die Wahrscheinlichkeit von S_1 von der Teilaufgabe (a) verwendet haben.

Aufgabe 1.3 (Markov-Ketten) *10 Punkte*

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette auf $S = \{1, 2, 3\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen. Ist die Markov-Kette irreduzibel?

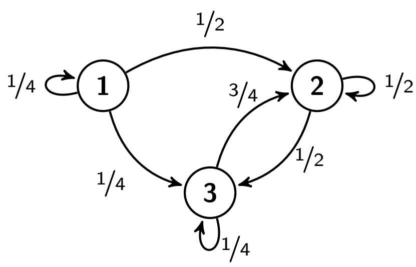
(b) Sei $Y = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \neq 1\}$. Welche Verteilung hat Y, wenn $X_0 = 1$ ist? Berechnen Sie außerdem $\mathbb{P}(X_n = 1 \,|\, X_0 = 1), n \in \mathbb{N}$.

(c) Bestimmen Sie alle gegebenenfalls vorhandenen invarianten Verteilungen zu dieser Übergangsmatrix

(d) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j \,|\, X_0 = 1), j \in \{1, 2, 3\}$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 1.3.

(a)



Die Kette ist nicht irreduzibel, z.B. es gibt keinen Pfad von 2 nach 1 (oder 3 nach 1).

(b) Wenn $X_0 = 1$, ist Y geometrisch verteilt mit Parameter $1 - \mathbb{P}(X = 1|Y = 1) = 3/4$. Falls $X_0 = 1$, dann für $n > 1$ gilt $X_n = 1$ genau dann, wenn $X_1 = X_2 = \ldots = X_{n-1} = 1$. Damit gilt

$$\mathbb{P}(X_n = 1|X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_n = X_{n-1} = \ldots = X_1 = 1|X_0 = 1) = \mathbb{P}(Y > n|X_0 = 1) = (1-3/4)^n = \frac{1}{4^n}.$$

(c) Sei $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)^T$ eine invariante Verteilung. $\pi^T P = \pi^T$ liefert $\pi_1 = 0$, ${}^{\pi_2}/_2 + {}^{3\pi_3}/_4 = \pi_2$, also $\pi_3 = {}^{2\pi_2}/_3$. Da $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, daraus folgt, dass $\pi_2 + {}^{2\pi_2}/_3 = 1$, also $\pi_2 = {}^3/_5$ und $\pi_3 = {}^2/_5$. Also ist $\pi = (0, {}^3/_5, {}^2/_5)$ die eindeutige invariante Verteilung.

(d) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j|X_0 = 1) = \pi_j$, für $j = 1, 2, 3$, also 0 für $j = 1$, ${}^3/_5$ für $j = 2$ und ${}^2/_5$ für $j = 3$.

Aufgabe 1.4 *10 Punkte*

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ \frac{x^3}{8} & \text{falls } 0 \le x \le 2, \\ 1 & \text{falls } x > 2. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie den Wert der Dichte von X im Punkt $x = 0.5$.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ und die Varianz $\mathbb{V}[X]$.

(c) Es sei Y eine von X abhängige Zufallsvariable mit $\mathbb{V}[Y] = 1$ und $\mathbb{V}[X+Y] = \frac{1}{2}$. Berechnen Sie die Kovarianz sowie die Korrelation von X und Y.

Lösungsskizze zu Aufgabe 1.4.

(a)

$$f_X(0.5) = F_X'(0.5) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0.5} \frac{x^3}{8} = \left(\frac{3}{8}x^2\right)\Big|_{x=0.5} = \frac{3}{32}.$$

(b) Mit der letzten Teilaufgabe berechneten Dichte gilt

$$\mathbb{E}X = \int_0^2 x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 x\frac{3x^2}{8}\mathrm{d}x = \left[\frac{3x^4}{32}\right]_0^2 = \frac{48}{32} = \frac{3}{2}.$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^2 x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{3}{8}x^4\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{40}x^5\right]_0^2 = \frac{96}{40} = \frac{12}{5},$$

und da $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$, daraus folgt $\mathbb{V}[X] = \frac{12}{5} - \frac{9}{4} = 0.15$.

(c) Wir berechnen $\operatorname{cov}(X,Y)$ aus der Gleichung $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y)$. Dann folgt

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} - 1 - 0.15\Big) = -0.325.$$

Korrelation:

$$\operatorname{corr}(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)}} = \frac{-0.325}{\sqrt{0.15}} \approx -0.839.$$

Aufgabe 1.5 (Verteilungen) *10 Punkte*

Ein stochastischer Algorithmus terminiert mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.2$.

(a) Der Algorithmus wird 150 Mal aufgerufen. Sei X die Anzahl Läufe, bei denen er terminiert. Welche Verteilung hat X? Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{V}(X)$.

(b) Verwenden Sie eine geeignete Approximation, um in der Situation von (a) die Wahrscheinlichkeit für höchstens 20 Terminierungen zu berechnen.

(c) Y bezeichne die Anzahl Läufe, bis der Algorithmus zum ersten Mal terminiert. Welche Verteilung hat Y? Berechne $\mathbb{P}(Y \geq 10)$.

(d) Wie viele Male muss der Algorithmus aufgerufen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 40% mindestens eine Terminierung stattfindet?

Lösungsskizze zu Aufgabe 1.5.

(a) $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, wobei $n = 150$ und $p = 0.2$. Daraus folgt $\mathbb{E}X = np = 30$ und $\mathbb{V}X = np(1-p) = 24$.

(b)

$$\mathbb{P}(X \leq 20) = \mathbb{P}\Big(\frac{X-30}{\sqrt{24}} \leq \frac{20-30}{\sqrt{24}}\Big) \approx \mathbb{P}\Big(Y \leq \frac{-10}{\sqrt{24}}\Big) \approx \mathbb{P}(Y \leq -2.04) = \mathbb{P}(Y \geq 2.04) \approx 0.0207,$$

wobei Y standardnormalverteilt ist. [Alternativ könnte man $\mathbb{P}(X \leq 20) = \mathbb{P}(0 \leq X \leq 20)$ approximieren. Der Wert $\mathbb{P}(Y \geq 6.12)$ steht nicht in der Tabelle, aber ist offensichtlich kleiner als 0.0001 nach der Tabelle. Analog mit 1/2-Korrektur: Endergebnis $1 - \Phi(1.94) = 0.0268$.]

(c) Y ist geometrisch verteilt mit Parameter $p = 0.2$. Daraus folgt $\mathbb{P}(Y \geq 10) = \mathbb{P}(Y > 9) = (1-p)^9 = 0.8^9 \approx 0.13$.
[$\mathbb{P}(Y > n) = (1-p)^n$ muss man nicht auswendig kennen, man kann sie mit der geometrischen Reihe oder auch direkt mit dem Taschenrechner berechnen.]

(d) Gesucht ist das kleinste n, sodass $\mathbb{P}(Y \leq n) \geq 0.4$. Da $\mathbb{P}(Y \leq 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = 0.2$, $\mathbb{P}(Y \leq 2) = \mathbb{P}(Y = 1) + 0.2 \cdot 0.8^2 = 0.36$, und $\mathbb{P}(Y \leq 3) = \mathbb{P}(Y \leq 2) + 0.2 * 0.8^2 = 0.488$, ist $n = 3$ die Lösung.

Tabelle: $\Phi_{0,1}(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable X

z_α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.50	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.60	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.70	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.80	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.90	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.00	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.10	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.20	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.30	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.40	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998