Aufgabe 1.1 (10 Punkte)
Der Ortsteil von Berlin, wo eine Person aus unserem Studiengang wohnt, ist durch eine Markov-Kette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit den folgenden 3 Zuständen gegeben:

Friedrichshain (F), Marienfelde (M) und Wedding (W).

Falls die Person dieses Jahr in F wohnt, wohnt sie nächstes Jahr mit Wahrscheinlichkeit 1/2 in F und mit Wahrscheinlichkeit 1/2 in W.
Falls sie dieses Jahr in M wohnt, wohnt sie nächstes Jahr mit Wahrscheinlichkeit 1/3 in F und mit Wahrscheinlichkeit 2/3 in W.
Falls sie dieses Jahr in W wohnt, wohnt sie nächstes Jahr mit Wahrscheinlichkeit 2/3 in F und mit Wahrscheinlichkeit 1/3 in W.

(a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen der Markov-Kette.

(b) Ist die Kette irreduzibel?

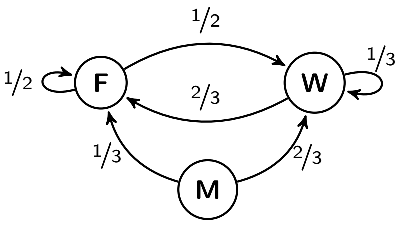
(c) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix der Markov-Kette (in der folgenden Reihenfolge der Zustände: F, M, W).

(d) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X_2 = \mathrm{F}|X_0 = \mathrm{F})$ und $\mathbb{P}(X_2 = \mathrm{M}|X_0 = \mathrm{W})$.

(e) Berechnen Sie alle invarianten Verteilungen der Kette.

(f) Warum gilt die folgende Aussage: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = \mathrm{M}|X_0 = \mathrm{M}) = 0$?

Lösungsskizze zu Aufgabe 1.1.

(a) 

(b) Die Kette ist nicht irreduzibel: z.B. es gibt keinen Pfad von M nach M (oder W nach M oder F nach M).

(c) In der Ordnung F, M, W:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}. \end{pmatrix}$$

(d) 1. Lösung: mit der Formel von der Gesamtwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X_2 = \mathrm{F}|X_0 = \mathrm{F}) = \mathbb{P}(X_2 = \mathrm{F}, X_1 = \mathrm{F}|X_0 = \mathrm{F}) + \mathbb{P}(X_2 = \mathrm{F}, X_1 = \mathrm{W}|X_0 = \mathrm{F}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{12}$.
2. Lösung: $\mathbb{P}(X_2 = \mathrm{F}|X_0 = \mathrm{F}) = p^2_{1,1}$ und

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & 0 & \frac{5}{12} \\ \frac{11}{18} & 0 & \frac{7}{18} \\ \frac{5}{9} & 0 & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

(Die anderen Einträge von P^2 müssen nicht berechnet werden).
$\mathbb{P}(X_2 = \mathrm{M}|X_0 = \mathrm{W} = 0) = 0$. Hier sind mehrere Begründungen korrekt: es gibt keinen Pfad der Länge 2 von W nach M, oder im Allgemeinen gibt es keinen Pfad nach M, oder aus P^2 ablesen als p^2_{32}.

(e) Die invarianten Verteilungen sind die Lösungen von $\pi^T P = \pi^T$ or $(P-I)^T\pi = 0$ (beide sind korrekt).
Berechnung: 1. Lösung mit $(P-I)^T\pi = 0$, $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)^T$:

$$P^T - I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}, \end{pmatrix}$$

also $-\frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{2}{3}\pi_3 = 0$, $-\pi_2 = 0$, $\frac{1}{2}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 - \frac{2}{3}\pi_3 = 0$. Aus der zweiten Gleichung folgt $\pi_2 = 0$, aus der ersten Gleichung dann $\pi_1 = \frac{4}{3}\pi_3$, also $\pi = (\frac{4}{3}\pi_3, 0, \pi_3)^T$. Da $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, es folgt $\pi = (\frac{4}{7}, 0, \frac{3}{7})^T$.
2. Lösung mit $\pi^T P = \pi^T$, $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)^T$: das Gleichungssystem ist $\frac{1}{2}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_3 = \pi_1$, $0 = \pi_2$, $\frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_3$. Also $\pi_2 = 0$, dann folgt aus der ersten Gleichung $\pi_1 = \frac{4}{3}\pi_3$, also $\pi = (\frac{4}{3}\pi_3, 0, \pi_3)^T$. Da $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, es folgt $\pi = (\frac{4}{7}, 0, \frac{3}{7})^T$.
(Das ist die eindeutige Lösung des Gleichungssystems, also gibt es nur eine invariante Verteilung, aber das muss man nicht erwähnen.)

(f) Z.B.: da $\mathbb{P}(X_n = M | X_0 = M) = 0$ für alle $n \geq 1$, ist der Grenzwert auch gleich 0. Man kann auch wieder die Tatsache erwähnen, dass es überhaupt keinen Pfad nach M gibt. *Falsche Lösung* ist die Irreduzibilität und Aperiodizität der Kette zu erwähnen!

Aufgabe 1.2 (10 Punkte)

Die gemeinsame Verteilung von den Zufallsvariablen X und Y sowie ihre Randverteilungen seien durch folgende unvollständige Tabelle gegeben:

$X \backslash Y$	0	1	2	$\mathbb{P}(X = k)$
0	$1/8$		$1/8$	
1	$1/16$			$1/2$
2		$1/16$	0	
$\mathbb{P}(Y = k)$		$1/8$		

Zudem ist der Erwartungswert von X gegeben durch $\mathbb{E}[X] = 1$.

(a) Bestimmen Sie den Wert von $\mathbb{P}(X = 0)$ und von $\mathbb{P}(X = 2)$.
Hinweis: Benutzen Sie die Information über $\mathbb{E}[X]$.

(b) Vervollständigen Sie die obige Tabelle.

(c) Berechnen Sie den Erwartungwert von Y.

(d) Sind X und Y unabhängig? Warum?

(e) Berechnen Sie die Kovarianz von X und X^2.
Alternativ, falls Sie Teil (a) nicht lösen konnten: nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/4$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 1.2.

(a) Es gilt: $\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) = 1/2 + 2\mathbb{P}(X = 2) \stackrel{!}{=} 1$. Also $\mathbb{P}(X = 2) = 1/4$ und wegen $\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 1$, folgt $\mathbb{P}(X = 0) = 1/4$.

(b) Die vollständige Tabelle lautet:

$X \backslash Y$	0	1	2	$\mathbb{P}(X=k)$
0	$1/8$	0	$1/8$	$1/4$
1	$1/16$	$1/16$	$3/8$	$1/2$
2	$3/16$	$1/16$	0	$1/4$
$\mathbb{P}(Y=k)$	$3/8$	$1/8$	$1/2$	

(c) $\mathbb{E}[Y] = 1/8 + 2 \cdot 1/2 = 9/8$.

(d) X und Y sind nicht unabhängig, denn z.B. gilt :

$$\mathbb{P}(X=2, Y=2) = 0 \neq 1/8 = \mathbb{P}(X=2) \cdot \mathbb{P}(Y=2).$$

(e) Es gilt: $\operatorname{cov}(X, X^2) = \mathbb{E}[X \cdot X^2] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X^2]$
Mit $\mathbb{E}[X^k] = \sum_j j^k \cdot \mathbb{P}(X=j)$ berechnen wir:
$E[X^2] = 1/2 + 4 \cdot 1/4 = 3/2$ und $E[X^3] = 1/2 + 8 \cdot 1/4 = 10/4 = 5/2$.
Also folgt: $\operatorname{cov}(X, X^2) = 5/2 - 1 \cdot 3/2 = 1$.

Aufgabe 1.3 (10 Punkte)

Nach überraschend erfolgreich bestandener Prüfung will ein Paar diesen Erfolg bei einem guten Essen im Restaurant feiern. Corona-bedingt beträgt die Wahrscheinlichkeit, spontan für denselben Abend noch eine Tischreservierung zu erhalten, 15%. Um die Auswahl an Restaurants zu vergrößern, rufen die beiden unabhängig voneinander in verschiedenen Restaurants an, um dort einen Tisch zu reservieren.

(a) Sei n die Anzahl der angefragten Restaurants und X die Anzahl der erfolgreichen Reservierungen. Welche Verteilung hat X? Bestimmen Sie zudem den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ und die Varianz $\mathbb{V}[X]$.

(b) Die beiden führen nun 10 Telefonate (mit unterschiedlichen Restaurants).

(i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie mindestens in einem Restaurant einen Tisch reservieren können?

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X=0 \,|\, X \leq 2)$.

(c) Um eine größere Auswahl an Restaurants zu haben, bittet das Paar noch einige Freunde, ebenfalls in Restaurants anzurufen, um einen Tisch für die beiden zu reservieren. Insgesamt werden mit 100 verschiedenen Restaurants Telefonate geführt. Bestimmen Sie mittels Normalapproximation die Wahrscheinlichkeit, dass das Paar in mindestens 5 Restaurants eine Tischreservierung erhält.
Hinweis: Es ist nicht nötig, die 1/2-Korrektur zu verwenden.

Lösungsskizze zu Aufgabe 1.3.

(a) $X \sim \operatorname{Bin}(n, p=0.15)$.
$\mathbb{E}[X] = 0.15 \cdot n$,
$\mathbb{V}[X] = n \cdot 0.15 \cdot (1-0.15) = 0.1275 \cdot n$.

(b) Für X aus (a) mit $n=10$ folgt:

(i)
$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) = 1 - 0.85^{10} \approx 0.803.$$

(ii) Mit $\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 0.85^{10} + 10 \cdot 0.15 \cdot 0.85^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.15^2 \cdot 0.85^8 \approx 0.197 + 0.347 + 0.276 \approx 0.82$ folgt

$$\mathbb{P}(X = 0 | X \leq 2) = \frac{\mathbb{P}(X = 0)}{\mathbb{P}(X \leq 2)} \approx \frac{0.197}{0.82} \approx 0.24.$$

(c) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \geq 5)$ für $n = 100$ mit $\mathbb{E}[X] = 15$ und $\mathbb{V}[X] = 12.75 \approx 3.57^2$.
Somit folgt nach dem Zentralen Grenzwertsatz, dass

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = \mathbb{P}\Big(\overbrace{\frac{X - 15}{3.57}}^{\sim \mathcal{N}(0,1)} \geq \overbrace{\frac{5 - 15}{3.57}}^{\approx -2.8}\Big) = 1 - \Phi(-2.8) = \Phi(2.8) \approx 0.9974.$$

Wertetabelle der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung:

z_α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.50	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.60	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.70	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.80	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.90	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.00	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.10	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.20	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.30	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.40	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Aufgabe 1.4 (10 Punkte)
Eine Zufallsvariable X habe die folgende Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2c}{x^3}, & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für ein bestimmtes $c \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Wert von c (damit f eine Dichte ist).

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(c) Berechnen Sie den Erwartungwert von X.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{V}[X] = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{4}{9}$. *Hinweis*: Logarithmengesetze.

Lösungsskizze zu Aufgabe 1.4.

(a) Es müssen gelten $f \geq 0$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Wir berechnen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2c}{x^3}\mathrm{d}x = \Big[-\frac{c}{x^2}\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{c}{1/4} - c = 3c.$$

also $3c = 1$, d.h., $c = 1/3$, dann ist $f \geq 0$ auch erfüllt. (Es genügt, die Nichtnegativität nur einmal zu erwähnen.)

(b) Die Verteilungsfunktion lautet $F(x) = 0$ für $x \leq 1/2$, $F(x) = 1$ für $x \geq 1$ (auch korrekt, falls man $x < 1/2$ oder $x > 1$ schreibt), und für $1/2 < x < 1$ ($x = 1/2$ und $x = 1$ sind auch in Ordnung hier),

$$F(x) = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{2}{t^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\Big[-\frac{1}{t^2}\Big]_{\frac{1}{2}}^{x} = \frac{1}{3}\Big[4 - \frac{1}{x^2}\Big].$$

(c)

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

(d) $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$. Es gilt

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2}{3x}\mathrm{d}x = \Big[\frac{2}{3}\ln x\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{2}{3}(\ln 1 - \ln\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\ln 2.$$

Da $\mathbb{E}[X]^2 = \frac{4}{9}$, folgt die Aussage.

Aufgabe 1.5 (Aufgabe 5 der 9LP-Klausur, 10 Punkte)

Die Anzahl an Fahrgästen auf der Nebenbahnstrecke Basdorf-Wensickendorf in Brandenburg war im Juli 2020 schon etwas höher als in den Monaten direkt davor. Die folgende Tabelle zeigt (in Prozent), wie stark die Kapazität der Fahrzeuge an den Tagen 06.07.2020 bis 12.07.2020 ausgelastet wurde.

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
53	47	50	49	55	51	52

Mit Hilfe eines geeigneten Hypothesentests möchten wir entscheiden, ob die erwartete Auslastung höchstens 50% ist. Das Fehlerniveau sei $\alpha = 0.05$.

(a) Berechnen Sie das empirische Mittel und die empirische Varianz der Daten in der Tabelle.

(b) Formulieren Sie eine geeignete Nullhypothese H_0 und die entsprechende Gegenhypothese.

(c) Berechnen Sie den Freiheitsgrad f für diesen Hypothesentest.

(d) Berechnen Sie den entsprechenden Testwert $t = t(x_1, \ldots, x_7)$.

(e) Bestimmen Sie den entsprechenden Vergleichswert (siehe die beigefügte Tabelle).

(f) Wie lautet die Entscheidung: wird H_0 angenommen oder wird sie abgelehnt? Warum?

(g) Bestimmen Sie zusätzlich das 0.01-Quantil der t-Verteilung mit Freiheitsgrad f mit Hilfe der beigefügten Tabelle (wobei f der Freiheitsgrad aus Aufgabe c) ist).

Die folgende Tabelle zeigt das α-Quantil der t-Verteilung mit Freiheitsgrad f für verschiedene Werte von α und f.

f \ α	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
49	1.2991	1.6766	2.0096	2.4049	2.6800
50	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
51	1.2984	1.6753	2.0076	2.4017	2.6757

Lösungsskizze zu Aufgabe 1.5.

(a) Das empirische Mittel ist $\bar{\mu}_n = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i = 51$. Die empirische Varianz ist

$$\bar{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_n)^2 = \frac{1}{6}\Big(4 + 16 + 1 + 4 + 16 + 0 + 1\Big) = \frac{42}{6} = 7.$$

(b) $H_0\colon \mu \leq 50$ versus $H_1\colon \mu > 50$ (nicht korrekt mit $<$ statt $\leq$)

(c) Der Freiheitsgrad ist $f = n - 1 = 6$.

(d) Der Testwert ist

$$t = \sqrt{n}\frac{\bar{\mu}_n - \mu_0}{\bar{\sigma}_n} = \sqrt{7}\frac{51 - 50}{\sqrt{7}} = 1.$$

(e) Der Vergleichswert ist das $1-\alpha$-Quantil der t-Verteilung mit Freiheitsgrad f, also $t_{0.95,6} = 1.9432$ (da einseitiger t-Test mit $H_0\colon \mu_0 \leq \ldots$, das muss nicht explizit da stehen).

(f) H_0 wird angenommen (oder: nicht abgelehnt, nicht verworfen), da der Testwert nicht größer als der Vergleichswert ist (oder: der Testwert liegt im Akzeptanzbereich).

(g) Es gilt (wegen der Symmetrie der t-Verteilung, die nicht explizit erwähnt werden muss)

$$t_{0.01,6} = -t_{0.99,6} = -3.1427.$$

(Folgefehler aus c) möglich)

Aufgabe 1.6 (Aufgabe 5 der 6LP-Klausur, 10 Punkte)

Die in Berlin durchgeführten Abstriche zum Test auf Covid19 werden in drei unterschiedlichen Labors A, B und C ausgewertet. Labor A wertet 50% der Tests aus, Labor B 35% und Labor C 15%. Die in Labor A durchgeführten Tests sind zu 97% korrekt, die in Labor B zu 95% und die in Labor C zu 98%.

(a) Stellen Sie die Situation als Baum dar. Schreiben Sie die im Aufgabentext gegebenen Wahrscheinlichkeiten an die richtigen Stellen im Baum.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Testergebnis nicht korrekt?

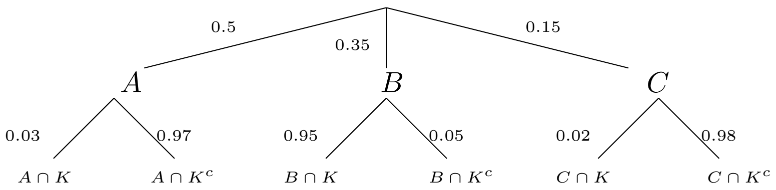
(c) Gegeben, dass ein Test nicht korrekt ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt das Testergebnis aus Labor B?

(d) Angenommen, die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, die einen Abstrich machen lässt, tatsächlich an Covid19 erkrankt ist, beträgt 3.5%. Es werden $n = 100000$ Tests durchgeführt. Ist die erwartete Anzahl an irrtümlicherweise positiven Testergebnissen größer als die erwartete Anzahl an tatsächlich Covid19-Erkrankten?

(e) Da die Fehlerrate in Labor B relativ hoch ist, müssen sich alle Patienten mit einem ersten Testergebnis aus Labor B nun noch einmal abstreichen lassen. Der zweite Abstrich wird nun mit Wahrscheinlichkeit $3/4$ in Labor A und mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ in Labor C ausgewertet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide Testergebnisse nicht korrekt?

Lösungsskizze zu Aufgabe 1.6.

(a) Notation: A, B, C: im jeweiligen Labor wird getestet, K: Testergebnis korrekt.



(b) Formel von der Gesamtwahrscheinlichkeit liefert:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K^c) &= \mathbb{P}(K^c|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(K^c|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(K^c|C)\mathbb{P}(C)\\ &= 0.03 \cdot 0.5 + 0.05 \cdot 0.35 + 0.02 \cdot 0.15 = 0.0355.\end{aligned}$$

(c) Anwenden von Bayes-Formel liefert:

$$\mathbb{P}(B|K^c) = \frac{\mathbb{P}(K^c|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(K^c)} = \frac{0.05 \cdot 0.35}{0.0355} \approx 0.493.$$

(d) Erwartete Anzahl an tatsächlich Erkrankten: $3.5\% \cdot 100000 = 3500$.
Wahrscheinlichkeit für falsch-positives Testergebnis: $p = (1 - 0.035) \cdot \mathbb{P}(K^c) = 0.965 \cdot 0.0355 = 0.0342575$.
Antwort: Nein, da $p \cdot 100000 < 3426 < 3500$.

(e) Unabhängigkeit der Tests:

$$\mathbb{P}(K^c|B) \cdot \Big(3/4\ \mathbb{P}(K^c|A) + 1/4\ \mathbb{P}(K^c|C)\Big) = 0.05 \cdot \Big(3/4 \cdot 0.03 + 1/4 \cdot 0.02\Big) = 0.001375$$