TheGI 1: Grundlagen und algebraische Strukturen

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 06. April 2009

2. Schriftliche Leistungskontrolle (EK-N)

Punktzahl In dieser schriftlichen Leistungskontrolle sind 100 Punkte erreichbar. Wer 40 Punkte erreicht, hat die schriftliche Leistungskontrolle bestanden (Note 4.0 oder besser).

Bearbeitungsdauer Die Bearbeitungsdauer beträgt 75 Minuten. Ihr erhaltet zudem 15 weitere Minuten für das Lesen der Aufgabenstellung und das Beschriften der ausgeteilten Zettel mit Eurem Namen und Eurer Matrikelnummer.

Hilfsmittel Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist die in der Vorlesung verwendete und auf der Vorlesungsseite bereit gestellte „Formelsammlung“. Diese darf keine Notizen enthalten (und sie darf auch während der Klausur nicht als Papier oder Schmierpapier verwendet werden). Eigenes Papier darf *nicht* verwendet werden.

Aufgabenreihenfolge Die gegebene Reihenfolge der Aufgaben orientiert sich an der Themenreihenfolge in der Vorlesung. Es wird daher empfohlen, die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben selbst durch Abschätzung des Aufwands für die einzelnen Aufgaben festzulegen.

- Antworten zu den Aufgaben sind auf demselben Blatt zu geben, auf dem die jeweilige Aufgabenstellung steht. Dabei können beide Seiten der Blätter verwendet werden. Sofern weitere Blätter benötigt werden, werden diese durch uns bereitgestellt. **Lösungen zu verschiedenen Aufgaben sind stets auf unterschiedlichen Blättern abzugeben!**
- Auf jedem abgegebenen Blatt ist die **bearbeitete Aufgabe, Name und Matrikelnummer** anzugeben.
- Antworten oder Teile von Antworten, die mit Rotstift oder Bleistift geschrieben oder nicht eindeutig lesbar sind, werden nicht bewertet. Es sind nur dokumentenechte Stifte zugelassen.

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	Studiengang:
(Tutorin/Tutor:)	

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5		Σ	Note
Punkte	10	20	24	24	22		100	
Erreicht								
Korrektor								

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Beantworte **ohne Begründung** die folgenden Aussagen.

Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz gibt es einen Punkt Abzug. Insgesamt gibt es auf diese Aufgabe mindestens null Punkte.
Nicht eindeutige Markierungen werden mit Punktabzug gewertet!

Bei dieser Aufgabe gibt es *NUR* 10 Punkte; verlieren Sie also nicht zuviel Zeit!

(a) Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- ☐ Ein Wort ist eine endliche Kette von Buchstaben aus einem Alphabet.
- ☐ Ein Alphabet ist eine unendlich große Menge von Buchstaben.
- ☐ Eine Sprache ist eine beliebig große Menge von Wörtern.
- ☐ Das leere Wort ist in jeder Sprache enthalten.

(b) Sei A eine beliebige Sprache über einem nicht leeren Alphabet, die mindestens das Wort $w \neq \lambda$ enthält. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- ☐ A^0 enthält keine Wörter.
- ☐ A^0 enthält nur das Wort λ.
- ☐ A^0 enthält mindestens das Wort w.

(c) Sei $\mathcal{A}$ ein beliebiges nicht leeres Alphabet. Welche der folgenden Sprachen sind regulär?

- ☐ $\mathcal{A}^*$.
- ☐ $\{x^{25}y^{25} \mid x, y \in \mathcal{A}\}$.
- ☐ $\{xy \mid x, y \in \mathcal{A}^* \wedge x = y^{-1}\}$.

(d) Wann ist eine Sprache A regulär?

- ☐ Wenn es eine reguläre Grammatik G mit $\mathrm{L}(G) = A$ gibt.
- ☐ Wenn es einen regulären Ausdruck gibt, der A beschreibt.
- ☐ Wenn $\mathbf{PUMP}(A)$ gilt.

(e) Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- ☐ Zu jeder kontextsensitiven Sprache gibt es eine kontextfreie Grammatik.
- ☐ Wenn G eine reguläre Grammatik ist, dann ist sie auch eine kontextfreie Grammatik.
- ☐ Wenn A eine kontextfreie Sprache ist und G eine Grammatik mit $\mathrm{L}(G) = A$, dann muss G eine kontextfreie Grammatik sein.

(f) Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- ☐ Mit dem Pumping Lemma kann man für jede nicht reguläre Sprache zeigen, dass sie nicht regulär ist.
- ☐ $\mathbf{PUMP}(A)$ gilt für jede reguläre Sprache A.
- ☐ Jede Sprache A mit nur endlich vielen Wörtern, d. h. $\exists n \in \mathbb{N}.\ \#(A) = n$, ist regulär.
- ☐ Für jede Sprache A mit unendlich vielen Wörtern gilt $\neg\mathbf{PUMP}(A)$, d.h. $\mathbf{PUMP}(A)$ gilt nicht.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 2 **(20 Punkte)**

Gegeben seien die Signatur Σ_W, die Σ_W-Algebra S und das Variablensystem

$$X \triangleq (X_s)_{s\in\{alph,word\}} \text{ mit } X_{alph} \triangleq \{x_1, x_2, x_3\} \text{ und } X_{word} \triangleq \{y\}.$$

Σ_W	S
$alph$	$S_{alph} \triangleq \{\mathsf{A}, \dots, \mathsf{Z}\}$
$word$	$S_{word} \triangleq \{\mathsf{A}, \dots, \mathsf{Z}\}^*$
$\alpha : \lambda \to alph$	$\alpha_S \triangleq \mathsf{A}$
$empty : \lambda \to word$	$empty_S \triangleq \lambda$
$app : alph \cdot word \to word$	$app_S : S_{alph} \times S_{word} \to S_{word}$ $(v, w) \mapsto v \cdot w$
$con : word \cdot word \to word$	$con_S : S_{word} \times S_{word} \to S_{word}$ $(w_1, w_2) \mapsto w_1 \cdot w_2$

$v \cdot w$ bzw. $w_1 \cdot w_2$ bezeichnen in S die Konkatenation.

1. (2 Punkte) Gib ein Variablenassignment ass an, das der Variablen x_1 den Wert L, x_2 den Wert R, x_3 den Wert K und der Variablen y den Wert USU zuordnet.
   Hinweis: Achte auf die korrekte Angabe aller Typindizes und auf die vollständige Angabe des Variabelnassignment.
2. (6 Punkte) Werte den folgenden Term in der Σ_W- Algebra S unter Verwendung von X und ass (aus Aufgabe 2.1) aus.

   $$m \triangleq con(app(x_3, app(x_1, app(\alpha, empty))), con(y, app(x_2, empty)))$$

   Werte dazu die folgenden sechs Terme aus. Gib jeweils mindestens 1 sinnvollen Zwischenschritt an, (d.h. mit Ergebnis müssen mindestens 2 Schritte gemacht werden).

   $$m_1 \triangleq app(\alpha, empty) \quad m_2 \triangleq app(x_1, m_1) \quad m_3 \triangleq app(x_3, m_2)$$
   $$m_4 \triangleq app(x_2, empty) \quad m_5 \triangleq con(y, m_4) \quad m_6 \triangleq con(m_3, m_5)$$

3. (12 Punkte) Beweise die Aussage

   $$\forall t \in T_{\Sigma_W, word}.\ \exists n \in \mathbb{N}.\ \text{eval}(S)_{word}(t) = \mathsf{A}^n$$

   nur mit Hilfe von struktureller Induktion.
   Beachte, dass es in Σ_W zur Sorte $alph$ nur **einen** Grundterm gibt:

   $$T_{\Sigma_W, alph} = \{\alpha\}.$$

Achte auf die Vollständigkeit und Nachvollziehbarkeit Deiner Argumentation.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 3 **(25 Punkte)**

Gegeben seien das Alphabet $\mathcal{A} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$, die Signatur $\Sigma^{\mathcal{A}}_{regExp}$ und die $\Sigma^{\mathcal{A}}_{regExp}$-Algebra $E^{\mathcal{A}}$ aus der Formelsammlung, der reguläre Ausdruck

$$RA \triangleq \left(((\mathsf{a}\mathbf{0})^{*}\,\mathsf{a})^{*}\,\mathsf{b}\right)(\mathsf{a} + \mathsf{c})^{*}$$

und die Sprache

$$A \triangleq \{w \in \mathcal{A}^{*} \mid w = \mathsf{a}^{n}\mathsf{b}v \wedge n \in \mathbb{N} \wedge v \in \{\mathsf{a}, \mathsf{c}\}^{*}\}\,.$$

1. (2 Punkte) Gib 2 verschiedene Wörter an, die in der Sprache A enthalten sind.
2. (2 Punkte) Gib 2 verschiedene Wörter aus $\mathcal{A}^{*}$ an, die nicht in der Sprache A enthalten sind.
3. (6 Punkte) Gib eine reguläre Grammatik G_A an, welche die Sprache A erzeugt.
4. (9 Punkte) Beweise mit Hilfe der $\Sigma^{\mathcal{A}}_{regExp}$-Algebra $E^{\mathcal{A}}$, dass der reguläre Ausdruck RA die Sprache A beschreibt.
   Begründe jeden Schritt. Anwendungen derselben Definition dürfen in einem Schritt zusammengefasst werden, das betrifft insbesondere auch die Anwendung der Definitionen von $\mathrm{term}^{\mathcal{A}}$ und $\mathrm{eval}(E^{\mathcal{A}})_{exp}$ und die Definitionen in $E^{\mathcal{A}}$.
5. (6 Punkte) Beweise, dass die regulären Ausdrücke $RA_1 \triangleq \mathsf{a} + \mathbf{0}$ und $RA_2 \triangleq \mathsf{a}$ die selbe Sprache beschreiben.
   Begründe jeden Schritt. Anwendungen derselben Definition dürfen in einem Schritt zusammengefasst werden, das betrifft insbesondere auch die Anwendung der Definitionen von $\mathrm{term}^{\mathcal{A}}$ und $\mathrm{eval}(E^{\mathcal{A}})_{exp}$ und die Definitionen in $E^{\mathcal{A}}$.

Achte auf die Vollständigkeit und Nachvollziehbarkeit Deiner Argumentation.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 4 **(23 Punkte)**

Gegeben seien das Alphabet $\mathcal{A} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ und die Grammatiken $G_i = (\{\mathsf{S}, \mathsf{T}, \mathsf{U}\}, \mathcal{A}, P_i, \mathsf{S})$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ mit

$P_1:$	$\mathsf{S} \to \mathsf{T} \mid \mathsf{U} \mid \mathsf{UU}$ $\mathsf{T} \to \mathsf{a} \mid \mathsf{aT} \mid \mathsf{aTb}$ $\mathsf{U} \to \mathsf{b} \mid \mathsf{aUa} \mid \mathsf{aUb}$	$P_2:$	$\mathsf{S} \to \mathsf{aaS} \mid \mathsf{bS} \mid \mathsf{T}$ $\mathsf{T} \to \mathsf{a} \mid \mathsf{aT}$
$P_3:$	$\mathsf{S} \to \mathsf{aTa} \mid \mathsf{bUb}$ $\mathsf{aTa} \to \mathsf{ab} \mid \mathsf{aSba}$ $\mathsf{bU} \to \mathsf{b} \mid \mathsf{baT} \mid \mathsf{Ub}$	$P_4:$	$\mathsf{S} \to \lambda \mid \mathsf{aT} \mid \mathsf{Tb}$ $\mathsf{T} \to \lambda \mid \mathsf{aU} \mid \mathsf{Ub}$ $\mathsf{U} \to \lambda \mid \mathsf{aS} \mid \mathsf{Sb}$

1. (3 Punkte) Gib einen Ableitungsbaum für das Wort baabaa in der Grammatik G_2 an.
2. (4 Punkte) Gib einen regulären Ausdruck an, der die Sprache $\mathrm{L}(G_2)$ beschreibt.
3. (3 Punkte) Beweise, dass die Wörter aaab, aabab und abaaba von der Grammatik G_1 erzeugt werden können.
   Hinweis: Für das Wort aaab kann als erster Ableitungsschritt die Regel $\mathsf{S} \to \mathsf{T}$, für aabab kann als erstes $\mathsf{S} \to \mathsf{U}$ und für abaaba kann als erstes die Regel $\mathsf{S} \to \mathsf{UU}$ verwendet werden.
4. (6 Punkte) Gib die Sprache $\mathrm{L}(G_1)$ als Menge an.
   Hinweis: $\mathrm{L}(G_1) = \left\{w \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^* \mid \mathsf{S} \Rightarrow^*_{G_1} w\right\}$ genügt an dieser Stelle nicht. Für die Angabe der Sprache kann es hilfreich sein, sich zuerst zu überlegen, welche Sprachen jeweils mit den Nichtterminalen T und U erzeugt werden. Anschließend muss man sich dann nur noch überlegen, wie sich aus diesen beiden Teilsprachen, die Sprache $\mathrm{L}(G_1)$ ergibt.
5. (7 Punkte) Gib die Typen der Grammatiken G_1, G_2, G_3 und G_4 nach Chomsky in der folgenden Tabelle an. Eine Begründung ist nicht notwendig.

	Typ-0	Typ-1	Typ-2	Typ-3
G_1				
G_2				
G_3				
G_4				

Achte auf die Vollständigkeit und Nachvollziehbarkeit Deiner Argumentation.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 5 **(22 Punkte)**

1. (15 Punkte) Beweise nur mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass die Sprache

$$A \triangleq \left\{ w \in \{0, 1, 2\}^* \mid w = v2v^{-1} \wedge v \in \{0, 1\}^* \right\}$$

   nicht regulär ist.

2. (7 Punkte)

   (a) Gib den „kleinsten" Typ der Sprache A in der Chomsky Hierarchie an.

   (b) Untermauere Deine Behauptung. Gib dazu eine Grammatik G mit $\mathrm{L}(G) = A$ an, die den für A angegebenen „kleinsten" Typ hat.
   Hinweis: Die Angabe der Gramatik G für die Sprache A genügt hier. Es muss *nicht* bewiesen werden, dass für die angegebene Grammatik G tatsächlich $\mathrm{L}(G) = A$ gilt.

   Hinweis: Mit „kleinsten" Typ der Sprache ist der „kleinste" Typ bezüglich der Hierarchie $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$ gemeint. Typ 0 ist demnach der größte und Typ 3 der kleinste Typ.

Achte auf die Vollständigkeit und Nachvollziehbarkeit Deiner Argumentation.

Name: Vorname: Matrikelnummer: