TheGI 1: Grundlagen und Algebraische Strukturen

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 16. Dezember 2008

Schriftliche Leistungskontrolle (ZK)

Punktzahl

In dieser schriftlichen Leistungskontrolle sind 100 Punkte erreichbar. Wer 40 Punkte erreicht, hat die schriftliche Leistungskontrolle bestanden (Note 4.0 oder besser).

Bearbeitungsdauer

Die Dauer der Leistungskontrolle beträgt 75 Minuten. Ihr erhaltet zudem 15 weitere Minuten für das Lesen der Aufgabenstellungen und das Beschriften der ausgeteilten Zettel mit eurem Namen und eurer Matrikelnummer.

Hilfsmittel

Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist die in der Vorlesung verwendete und auf der Vorlesungsseite bereit gestellte „Formelsammlung Wintersemester 2008/2009“. Diese darf keine Notizen enthalten (und sie darf auch während der Klausur nicht als Papier oder Schmierpapier verwendet werden). Eigenes Papier darf *nicht* verwendet werden.

Aufgabenreihenfolge

Es wird empfohlen, die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben selbst durch Abschätzung des Aufwands für die einzelnen Aufgaben festzulegen.

- Antworten zu den Aufgaben sind auf demselben Blatt zu geben, auf dem die jeweilige Aufgabenstellung steht. Dabei können beide Seiten der Blätter verwendet werden. Sofern weitere Blätter benötigt werden, sind die Seiten 10-13 zu verwenden. Weiterhin werden durch uns weitere bereitgestellt. **Lösungen zu verschiedenen Aufgaben sind stets auf unterschiedlichen Blättern abzugeben!**
- Auf jedem Blatt sind **die bearbeitete Aufgabe, der Name und die Matrikelnummer** anzugeben.
- Es sind nur dokumentenechte Stifte zugelassen.

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	Studiengang:
Mein Tutor:	

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5	6		Σ	Note
Punkte	10	17	8	20	30	15		100	—
Erreicht									
Korrektor									

Matrikelnummer: ________________ Name: ________________

Aufgabe 1 – Multiple Choice (10 Punkte)

Jedes richtige Kreuz bringt Ihnen $0,5$ *oder* $1,0$ *Punkte (je nach Frage).*
Jedes falsche Kreuz bringt Ihnen $-0,5$ *oder* $-1,0$ *Punkte (je nach Frage).*
Sie erhalten bei dieser Aufgabe 1 mindestens 0 *Punkte.*
Sie erhalten keinen Abzug, falls Sie keine Kreuze setzen.
Bei dieser Aufgabe gibt es* NUR *10 Punkte; verlieren Sie also nicht zuviel Zeit!

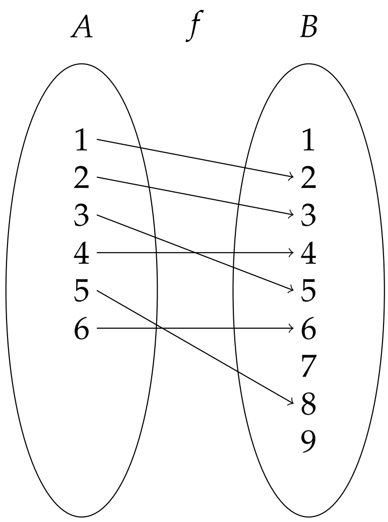
a) Bei welchen Aussagen sind die Pfeile in der richtigen Richtung?
Alle Variablen sind implizit allquantifiziert und stammen aus $\mathbb{Z}$.

- ☐ $\{ a, b \} = \{ a, c \} \Leftarrow b = c$
- ☐ $\{ b \} = \{ a, c \} \Rightarrow a = c$
- ☐ $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
- ☐ $x^2 - 1 = 0 \Leftarrow x = 1$

b) Gegeben sei die Menge $A = \{ 0, 1, 2 \}$.
Welche der folgenden Relationen $R \subseteq A \times A$ ist eine totale Ordnung?

- ☐ $R = \{ (0,0), (0,1), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2) \}$
- ☐ $R = \{ (0,0), (0,1), (1,1), (2,0), (2,1), (2,2) \}$
- ☐ $R = \{ (0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (2,0), (2,1), (2,2) \}$
- ☐ $R = \{ (0,0), (0,1), (1,1), (2,0), (2,2) \}$
- ☐ $R = \{ (0,0), (0,1), (1,1), (2,1), (2,2) \}$

c) Welche der Aussagen über die Abbildung f sind korrekt?



- ☐ $f(\{ 2, 3, 6 \}) = f(\{ 1, 2, 3, 6 \})$
- ☐ $f^{-1}(\{ 3, 5, 6 \}) = f(\{ 1, 2, 6 \})$
- ☐ $\mathrm{Def}(f) = A$
- ☐ $\mathrm{Bild}(f) \subseteq A$
- ☐ f^{-1} ist eine totale Abbildung

d) Welche Aussagen gelten?

- ☐ $\text{card}(\mathbb{N}) < \text{card}(\mathbb{Z})$
- ☐ $\text{card}(\mathbb{N}) \leq \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$
- ☐ $\text{card}(\mathbb{N}) \geq \text{card}(\mathbb{R})$
- ☐ $\text{card}(\{1, 3, 5, \dots\}) \geq \text{card}(\mathbb{N})$

e) Sei $f : A \to B$ eine totale Abbildung. Sei $\text{Ker}(f)$ der Kern dieser Abbildung. Wenn $(a, b) \in \text{Ker}(f)$, dann ist auch $(f(a), f(b)) \in \text{Ker}(f)$.

- ☐ Wahr
- ☐ Falsch

f) Sei $f : A \to B$ eine totale Abbildung. Sei $\text{Ker}(f)$ der Kern dieser Abbildung. Es gilt: $\text{Ker}(f) = \Delta_A$, genau dann wenn f injektiv ist.

- ☐ Wahr
- ☐ Falsch

g) Sei $A \neq \emptyset$. Welche Aussagen sind korrekt?

- ☐ $(A^A, \circ, \text{id}_A)$ ist ein Monoid.
  $\circ$ ist die Komposition von Abbildungen.
- ☐ $(A^*, \cdot, \lambda)$ ist ein kommutatives Monoid.
  $\cdot$ ist die Konkatenation von Worten.
- ☐ $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist eine Gruppe.
  $\cdot$ ist die Multiplikation auf ganzen Zahlen.
- ☐ $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap)$ ist ein vollständiger Verband.
  $\cup$ und $\cap$ sind Vereinigung bzw. Schnitt auf Mengen.

h) Sei $\Sigma = (S, OP)$ eine Signatur und seien A und B zwei Σ-Algebren. Wenn für alle $s \in S$ gilt: $A_s \cong B_s$, dann gibt es einen Σ-Isomorphismus $f : A \to B$.

- ☐ Wahr
- ☐ Falsch

Aufgabe 2 – Mengen (17 Punkte)

a) *(7 Punkte)*
Beweisen Sie: Es gibt Mengen A und B, für die die folgende Aussage *nicht* gilt.
Begründen Sie jeden Schritt ihres Beweises.

$$B \setminus A \quad \supseteq \quad (A \cup B) \setminus (B \cap A)$$

b) *(10 Punkte)* Sei der Operator $\Box_C$ definiert durch:

$$A \Box_C B \triangleq \{ x \mid x \in C \wedge (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \}$$

Beweisen Sie: Für beliebige Mengen A, B und C gilt die folgende Aussage.
Begründen Sie jeden Schritt ihres Beweises.

$$(A \Box_C B) \cap A = C \cap A \cap B$$

Hinweis: Sie dürfen die folgende Eigenschaft ohne Beweis verwenden.

$$E \triangleq (\forall p, q \,.\, ((p \Leftrightarrow q) \wedge p) \Leftrightarrow (p \wedge q))$$

Aufgabe 3 – Kardinalität (8 Punkte)

Seien A und B wie folgt gegeben.

$$A \triangleq \mathbb{Z} \times \{ 1 \}$$

$$B \triangleq \{ x \mid x \in \mathbb{Z} \land x \text{ ist gerade} \} = \{ \dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots \}$$

Konstruieren Sie eine bijektive totale Abbildung $f : A \to B$ und ihre bijektive totale Umkehrabbilung $f^{-1} : B \to A$.
Geben Sie diese Abbildungen *explizit* (das heißt ohne die jeweilige Umkehrabbildung zu verwenden) und *vollständig* an.
Beweisen Sie nicht die Bijektivität von f oder f^{-1}.

Aufgabe 4 – Äquivalenzen (20 Punkte)

Sei $f \triangleq \langle [0,5], [0,5]; \{ (0,2), (1,1), (2,4), (3,3), (4,4), (5,3) \} \rangle$.

a) *(8 Punkte)* Geben Sie $\mathrm{Ker}(f)$ *ohne Begründung* visualisiert an.

1 3 5

0 2 4

b) *(4 Punkte)* Geben Sie *ohne Begründung* eine kleinste Relation $R_1 \subseteq [0,5] \times [0,5]$ visualisiert an, für die gilt $\mathrm{t}(\mathrm{s}(\mathrm{r}(R_1))) = \mathrm{Ker}(f)$.

1 3 5

0 2 4

c) *(8 Punkte)*
Geben Sie eine kleinste Relation $R_2 \subseteq [0,5] \times [0,5]$ visualisiert an, für die gilt

- $\mathrm{Ker}(f) \subseteq R_2$ *und*
- $\forall a, b \in [0,5] \,.(a,b) \in R_2 \Rightarrow (g(a), g(b)) \in R_2$ mit:

$$g : [0,5] \to [0,5] \text{ mit } x \mapsto \begin{cases} 3 & , x = 5 \\ 4 & , x = 4 \\ 1 & , x \in \{1,3\} \\ 0 & , x \in \{2,0\} \end{cases}$$

Geben Sie ihren Lösungsweg an!

1	3	5
0	2	4

Matrikelnummer: ______________________ Name: ______________________

Aufgabe 5 – Homomorphismen (30 Punkte)

a) *(10 Punkte)* Geben Sie *ohne Begründung* zwei *verschiedene* injektive Σ_{Graph}-Homomorphismen $f_1 : G_1 \to G_2$ und $f_2 : G_1 \to G_2$ an.

b) *(4 Punkte) Begründen Sie kurz* warum der konstruierte Σ_{Graph}-Homomorphismus f_1 nicht surjektiv ist.

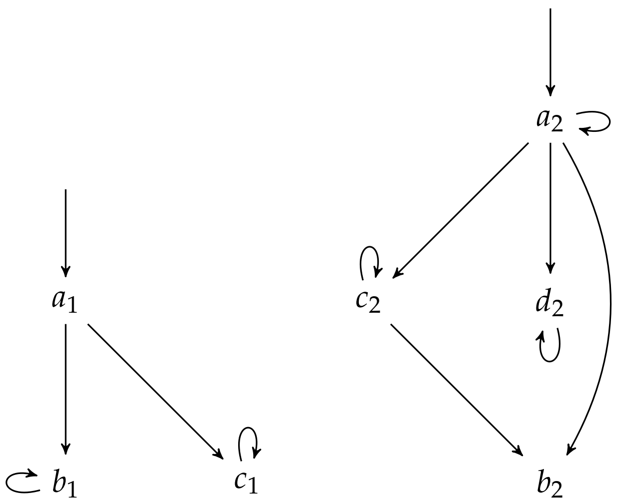
c) *(4 Punkte)* Geben Sie diejenigen Eigenschaften, die für die Operationsverträglichkeit des Σ_{Graph}-Homomorphismus f_2 mit dem Operationssymbol *src* bewiesen werden müssen, explizit (das heißt ohne Quantoren) an.
Führen Sie *nicht* den Beweis!

d) *(6 Punkte)* Geben Sie *ohne Begründung* (genau) einen Σ_{Graph}-Homomorphismus $g : G_1 \to G_1$ an, für den gilt:

- g ist ein Σ_{Graph}-Isomorphismus *und*
- $g_{edge} \neq \mathrm{id}_{G_{1edge}}$ *und*
- $g_{vertex} \neq \mathrm{id}_{G_{1vertex}}$

e) *(6 Punkte)* Beweisen Sie mittels Widerspruchsbeweis, dass es keinen Σ_{Graph}-Homomorphismus $h : G_2 \to G_1$ gibt.

Σ_{Graph}	G_1	G_2
vertex *edge*	$G_{1vertex} \triangleq \{ a_1, b_1, c_1 \}$ $G_{1edge} \triangleq$ $\{ (a_1, b_1), (b_1, b_1), (a_1, c_1), (c_1, c_1) \}$	$G_{2vertex} \triangleq \{ a_2, b_2, c_2, d_2 \}$ $G_{2edge} \triangleq$ $\{ (a_2, a_2), (a_2, b_2), (a_2, c_2), (a_2, d_2), (c_2, c_2), (c_2, b_2), (d_2, d_2) \}$
$root : \lambda \to vertex$ $src : edge \to vertex$ $trg : edge \to vertex$	$root_{G_1} \triangleq a_1$ $src_{G_1} : G_{1edge} \to G_{1vertex}$ $(x, y) \mapsto x$ $trg_{G_1} : G_{1edge} \to G_{1vertex}$ $(x, y) \mapsto y$	$root_{G_2} \triangleq a_2$ $src_{G_2} : G_{2edge} \to G_{2vertex}$ $(x, y) \mapsto x$ $trg_{G_2} : G_{2edge} \to G_{2vertex}$ $(x, y) \mapsto y$



(a) Der Graph G_1. **(b)** Der Graph G_2.

Abbildung 1: Die visualisierten Darstellungen der beiden Σ_{Graph}-Algebren.

Matrikelnummer: ______________________ Name: ______________________

Aufgabe 6 – Induktion (15 Punkte)

a) *(10 Punkte) Beweisen Sie* die folgende Aussage.

$$\forall n \in \mathbb{N} \,.\, P(n) \qquad \text{mit} \qquad P(n) \triangleq (3^n < (n+2)!)$$

b) *(5 Punkte)* Geben Sie das Induktionsschema für einen Induktionsbeweis für die folgende Aussage an. Füllen Sie hierzu die Lücken im nachfolgenden Induktionsbeweis.
Führen Sie *nicht* den Beweis!

$$\forall z \in \mathbb{Z} \,.\, P(z) \qquad \text{mit} \qquad P(z) \triangleq \left(z^2 \geq 0\right)$$

1) *Induktionsanfang:* Sei $z =$ $\boxed{}$:

(Beweis.)

2) Wähle $x \in$ $\boxed{}$ beliebig und fest.

Induktionsvoraussetzung: $P(\boxed{})$.

Induktionsbehauptung: $P(\boxed{})$.

Indukionsschluss:

(Beweis.)

3) Wähle $x \in$ $\boxed{}$ beliebig und fest.

Induktionsvoraussetzung: $P(\boxed{})$.

Induktionsbehauptung: $P(\boxed{})$.

Indukionsschluss:

(Beweis.)

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :