TheGI 1: Grundlagen und Algebraische Strukturen

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 6. April 2009

Schriftliche Leistungskontrolle (ZK-N)

Punktzahl

In dieser schriftlichen Leistungskontrolle sind 100 Punkte erreichbar. Wer 40 Punkte erreicht, hat die schriftliche Leistungskontrolle bestanden (Note 4.0 oder besser).

Bearbeitungsdauer

Die Dauer der Leistungskontrolle beträgt 75 Minuten. Ihr erhaltet zudem 15 weitere Minuten für das Lesen der Aufgabenstellungen und das Beschriften der ausgeteilten Zettel mit eurem Namen und eurer Matrikelnummer.

Hilfsmittel

Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist die in der Vorlesung verwendete und auf der Vorlesungsseite bereit gestellte „Formelsammlung Wintersemester 2008/2009". Die Formelsammlung darf keine Notizen enthalten (und sie darf auch während der Klausur nicht als Papier oder Schmierpapier verwendet werden). Eigenes Papier darf *nicht* verwendet werden. Es dürfen nur die Inhalte der Formelsammlung bis einschließlich Abschnitt 2.4 verwendet werden.

Aufgabenreihenfolge

Die gegebene Reihenfolge der Aufgaben orientiert sich an der Themenreihenfolge in der Vorlesung. Es wird daher empfohlen, die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben selbst durch Abschätzung des Aufwands für die einzelnen Aufgaben festzulegen.

- Antworten zu den Aufgaben sind auf demselben Blatt zu geben, auf dem die jeweilige Aufgabenstellung steht. Dabei können beide Seiten der Blätter verwendet werden. Sofern weitere Blätter benötigt werden, sind die Seiten 10-13 zu verwenden. Weiterhin werden durch uns weitere bereitgestellt. **Lösungen zu verschiedenen Aufgaben sind stets auf unterschiedlichen Blättern abzugeben!**
- Auf jedem Blatt sind **die bearbeitete Aufgabe, der Name und die Matrikelnummer** anzugeben.
- Es sind nur Dokumentenechte Stifte zugelassen.

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	Studiengang:
Tutor:	

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte	10	15	10	20	30	15	100
Erreicht							
Korrektor							

Matrikelnummer: ______________________ Name: ______________________

Aufgabe 1 – Multiple Choice (10 Punkte)

Jedes richtige Kreuz bringt Ihnen $0,5$ oder $1,0$ Punkte (je nach Frage).
Jedes falsche Kreuz bringt Ihnen $-0,5$ oder $-1,0$ Punkte (je nach Frage).
Sie erhalten bei dieser Aufgabe 1 mindestens 0 Punkte.
Sie erhalten keinen Abzug, falls Sie keine Kreuze setzen.
Bei dieser Aufgabe gibt es NUR 10 Punkte; verlieren Sie also nicht zuviel Zeit!

a. Welche Aussagen sind korrekt?

☐ $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\,.\quad A \times B = \emptyset \Rightarrow B \setminus A = \emptyset$

☐ $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\,.\quad A \times B = \emptyset \Leftarrow B \setminus A = \emptyset$

☐ $\forall p, q \in \{\,\mathsf{T}, \mathsf{F}\,\}\,.\quad (p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

☐ $\forall p, q \in \{\,\mathsf{T}, \mathsf{F}\,\}\,.\quad \neg(p \Rightarrow q)$

b. Gegeben sei $R \triangleq \langle [1,3], [1,3]; \{\,(3,1), (3,2), (1,2)\,\} \cup \Delta_{[1,3]} \rangle$.
Welche der folgenden Aussagen gelten?

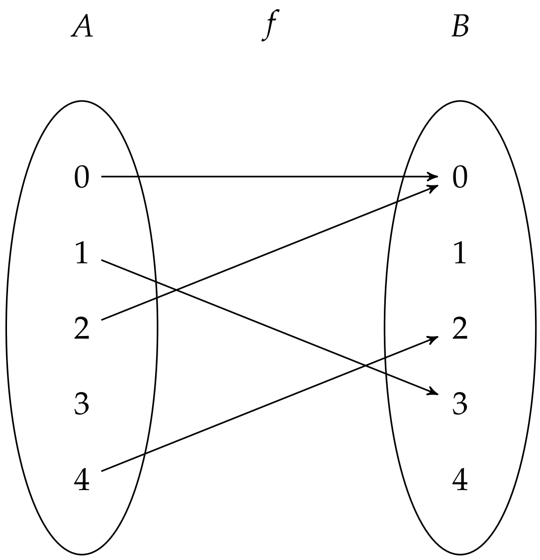
☐ $2 \cdot 3 \ll_R 2 \cdot 1 \ll_R 2 \cdot 1 \cdot 3$

☐ $2 \cdot 3 \cdot 1 \ll_R 2 \cdot 3 \ll_R 2 \cdot 1$

☐ $2 \cdot 3 \ll_R^{\mathsf{S}} 2 \cdot 1 \ll_R^{\mathsf{S}} 2 \cdot 1 \cdot 3$

☐ $2 \cdot 3 \cdot 1 \ll_R^{\mathsf{S}} 2 \cdot 3 \ll_R^{\mathsf{S}} 2 \cdot 1$

c. Welche der Aussagen über $f \subseteq A \times B$ sind korrekt?



☐ $f(\{\,0,2,4\,\}) = f(\{\,0,4\,\})$

☐ $f^{-1}(\{\,3,4\,\}) = f(\{1,4\})$

☐ $\mathrm{Def}(f) = A$

☐ f^{-1} ist eine partielle Abbildung

☐ $f \circ f \subseteq f$

☐ Es gibt eine Funktion $F : A \to B$, die f „enthält“ (d.h., $f \subseteq F$) und total ist.

d. Welche Aussagen gelten?
Hinweis: Achtet genau auf das Relationssymbol (also $\geq$, $\leq$, $<$ bzw. $>$).

- ☐ $\#(\mathbb{N}) < \#(\mathbb{Z})$
- ☐ $\#(\mathbb{N}) \leq \#(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$
- ☐ $\forall A, B \,.\, \mathrm{card}(A) \geq \mathrm{card}(B) \Rightarrow \#(A) \geq \#(B)$
- ☐ $\forall A, B \,.\, \mathrm{card}(A) > \mathrm{card}(B) \Rightarrow \#(A) > \#(B)$

e. Sei $f : A \to B$ eine totale Abbildung.
Wenn $\mathrm{Ker}(f) \supset \Delta_A$, dann gilt: ${}^{A}\!/_{\mathrm{Ker}(f)} = A$.

- ☐ Wahr
- ☐ Falsch

f. Sei $\Sigma = (S, OP)$ eine Signatur,
seien A und B zwei Σ-Algebren und
sei $f = (f_s : A_s \to B_s)_{s \in S}$ eine Familie von Abbildungen.

- ☐ Wenn f ein Σ-Homomorphismus ist,
dann gibt es keinen anderen Homomorphismus $g : A \to B$.
- ☐ Wenn f der einzige Σ-Homomorphismus mit Typ $A \to B$ ist,
dann ist A initial und B final in $\{ A, B \}$.

g. Sei $\Sigma = (S, OP)$ eine Signatur,
sei X eine Menge von Σ-Algebren,
sei A eine initiale Σ-Algebra in X und
sei $\mathrm{id}_A : A \to A$ der Identitätsmorphismus auf A.

- ☐ $\mathrm{id}_A \circ \mathrm{id}_A$ ist der initiale Homomorphismus zu A.
- ☐ Es gibt keinen initialen Homomorphismus zu A.
- ☐ id_A ist der initiale Homomorphismus zu A.

h. Seien A und B beliebig.
Wenn es eine surjektive Abbildung $f : A \to B$ gibt,
dann gibt es auch eine injektive Abbildung $g : B \to A$.

- ☐ Wahr
- ☐ Falsch

Aufgabe 2 – Mengen (15 Punkte)

a. *(7 Punkte)*
Beweisen Sie: Es gibt Mengen A, B und C, für die die folgende Aussage *nicht* gilt. *Begründen* Sie jeden Schritt ihres Beweises. Hierbei genügt es die Mengenoperatoren in *einem* Schritt aufzulösen.

$$\mathcal{P}((A \cap B) \setminus C) = \mathcal{P}(A \cup (B \setminus C))$$

b. *(8 Punkte)* Sei der Operator $\oplus$ definiert durch:

$$A \oplus B = ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup ((A \cap B) \uplus (A \cap B))$$

Beweisen Sie:
Für beliebige Mengen A und B mit $A \cap B = \emptyset$ gilt die folgende Aussage:

$$A \oplus B = A \cup B$$

Begründen Sie jeden Schritt ihres Beweises.
Hinweis: Sie dürfen die folgenden Eigenschaften ohne Beweis verwenden.

$$E_1 \triangleq \forall X \,.\, X \setminus \emptyset = X$$
$$E_2 \triangleq \forall X \,.\, X \cup \emptyset = X$$

Aufgabe 3 – Kardinalität (10 Punkte)

Sei $c \in \mathbb{N}^+$ beliebig und fest.
Seien A und B wie folgt gegeben.

$$A \triangleq \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \mod c = 0 \,\}$$

$$B \triangleq \{\, \mathbb{N} \,\} \times \mathbb{N} = \{\, (\mathbb{N}, 0), (\mathbb{N}, 1), \dots \,\}$$

Konstruieren Sie eine bijektive totale Abbildung $f : A \to B$ und ihre bijektive totale Umkehrabbilung $f^{-1} : B \to A$.
Geben Sie diese Abbildungen *explizit* (das heißt ohne die jeweilige Umkehrabbildung zu verwenden) und *vollständig* an.
Beweisen Sie nicht die Bijektivität von f oder f^{-1}.

Aufgabe 4 – Relationen (20 Punkte)

Sei $f \triangleq \langle [0,5], [0,5]; \{ (1,2), (2,4), (3,5), (5,5), (0,0), (4,2) \} \rangle$.

a. *(8 Punkte)* Geben Sie $R_1 = \mathrm{t}(\mathrm{s}(\mathrm{r}(f)))$ *ohne Begründung* visualisiert an.

1 3 5

0 2 4

b. *(7 Punkte)* Geben Sie *ohne Begründung* eine größte (d.h. maximale) Relation $R_2 \subseteq [0,5] \times [0,5]$ visualisiert an, für die gilt

- $R_2 \subseteq R_1$ *und*
- R_2 ist eine partielle Ordnung.

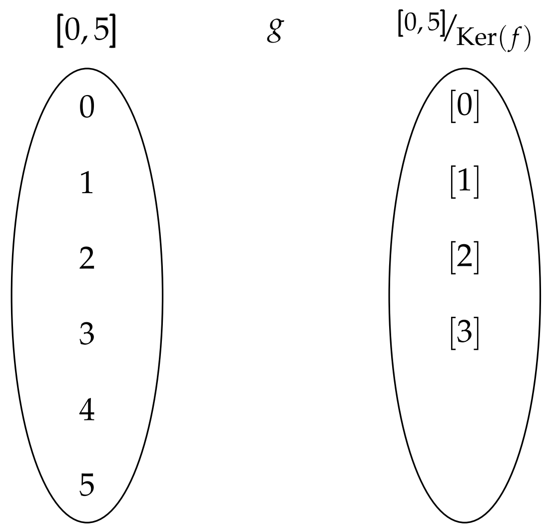
1 3 5

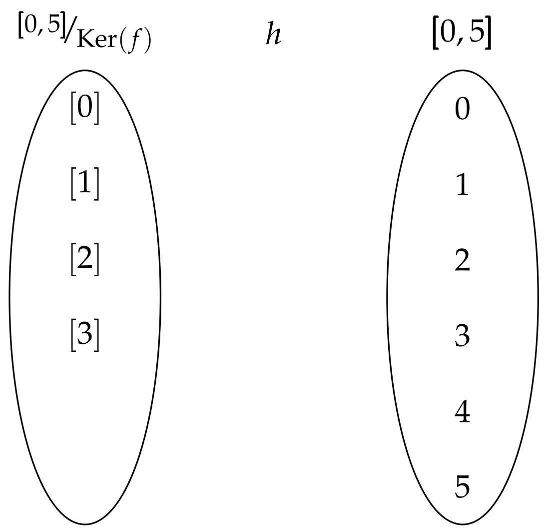
0 2 4

c. *(5 Punkte)* Geben Sie *ohne Begründung*

- eine totale surjektive Abbildung $g : [0,5] \to {}^{[0,5]}\!/_{\mathrm{Ker}(f)}$ und
- eine totale injektive Abbildung $h : {}^{[0,5]}\!/_{\mathrm{Ker}(f)} \to [0,5]$

visualisiert an, so dass $f = h \circ g$ gilt.
Hinweis: Hierbei ist f die auf Seite 6 genannte Relation f.
Hinweis: Es gilt: $\mathrm{Ker}(f) \neq \mathrm{t}(\mathrm{s}(\mathrm{r}(f)))$.





Aufgabe 5 – Homomorphismen (30 Punkte)

Sei die Signatur Σ_{Small} mit den Σ_{Small}-Algebren A, B und C wie folgt gegeben.

Σ_{Small}
nat
$z :\to nat$ $s : nat \to nat$ $add : nat \cdot nat \to nat$

A	B	C
$A_{nat} \triangleq \mathbb{N}$	$B_{nat} \triangleq \{1\}^*$	$C_{nat} \triangleq \mathbb{N} \times \{1\}^*$
$z_A \triangleq 0$ $s_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $x \mapsto x+1$ $add_A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(x,y) \mapsto x+y$	$z_B \triangleq \lambda$ $s_B : B_{nat} \to B_{nat}$ $x \mapsto x \cdot 1$ $add_B : B_{nat} \times B_{nat} \to B_{nat}$ $(x,y) \mapsto x \cdot y$	$z_C \triangleq (0,\lambda)$ $s_C : C_{nat} \to C_{nat}$ $(x,y) \mapsto (x+1, y \cdot 1)$ $add_C : C_{nat} \times C_{nat} \to C_{nat}$ $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto (x_1+x_2, y_1)$

Hinweis: Der Punkt „·“ in der Algebra B ist die übliche Konkatenation von Worten.

a. *(6 Punkte)*
Geben Sie *ohne Begründung* einen Σ_{Small}-Homomorphismus $f : A \to B$ an.

b. *(6 Punkte)*
Geben sie *ohne Begründung* einen Σ_{Small}-Homomorphismus $p : C \to A$ an.

c. *(9 Punkte) Beweisen Sie* die Operationsverträglichkeit von p.

d. *(2 Punkte)* Geben sie *ohne Begründung* folgende Werte explizit an.

- $v_{B1} \triangleq add_B(z_B, s_B(z_B)) =$ ☐ $=$ ☐
- $v_{B2} \triangleq add_B(s_B(z_B), z_B) =$ ☐ $=$ ☐
- $v_{C1} \triangleq add_C(z_C, s_C(z_C)) =$ ☐ $=$ ☐
- $v_{C2} \triangleq add_C(s_C(z_C), z_C) =$ ☐ $=$ ☐

e. *(7 Punkte) Beweisen Sie* per Widerspruch,
dass es keinen Σ_{Small}-Homomorphismus $h : B \to C$ gibt.
Hinweis: Siehe Teilaufgabe d.
Hinweis: Auch bei dieser Aufgabe dürfen nur Inhalte der Formelsammlung bis einschließlich Formelsammlung Abschnitt 2.4 verwendet werden.

Aufgabe 6 – Induktion (15 Punkte)

a. *(10 Punkte) Beweisen Sie* die folgende Aussage.

$$\forall n \in \mathbb{N} \,.\, P(n) \qquad \text{mit} \qquad P(n) \triangleq \left(\sum_{i=0}^{n} (3 \cdot (i+1)) = \frac{3 \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{2} \right)$$

b. *(5 Punkte)* Geben Sie das Induktionsschema für einen Induktionsbeweis für die folgende Aussage an. Füllen Sie hierzu die Lücken im nachfolgenden Induktionsbeweis.
Führen Sie *nicht* den Beweis!

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,.\, P((x,y)) \qquad \text{mit} \qquad P((x,y)) \triangleq \left(x^2 \cdot y^2 \geq x \cdot y \right)$$

1) *Induktionsanfang:* Zu Zeigen: $P(\boxed{})$:

(Beweis.)

2) Wähle $(w,z) \in \boxed{}$ beliebig und fest.

Induktionsvoraussetzung: $P(\boxed{})$.

Induktionsbehauptung: $P(\boxed{})$.

Indukionsschluss:

(Beweis.)

3) Wähle $(w,z) \in \boxed{}$ beliebig und fest.

Induktionsvoraussetzung: $P(\boxed{})$.

Induktionsbehauptung: $P(\boxed{})$.

Indukionsschluss:

(Beweis.)

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :

Matrikelnummer: ________________ *Name:* ________________

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :