TheGI 1: Grundlagen und Algebraische Strukturen

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 6. April 2010

Schriftliche Leistungskontrolle (ZK-N)

Hinweise:

- Ihr dürft nur die Abschnitte 1 bis 2.4 der Formelsammlung verwenden.
- Für diese schriftliche Leistungskontrolle gelten alle Hinweise, die in der Ankündigung der Kontrolle aufgelistet waren. Diese Hinweise sind bei Bedarf während der Leistungskontrolle verfügbar (Handzeichen genügt).

Studentenidentifikation:

Nachname	
Vorname	
Matrikelnummer	
Studiengang	☐ Informatik Bachelor, ☐ ______________________
Tutor	☐ Arne, ☐ Ewgenij, ☐ Hanna, ☐ Katja, ☐ Kirstin, ☐ Mascha, ☐ Sven, ☐ Tsveti

Aufgabenübersicht:

Aufgabe	Seite	Punkte	Themenbereich
1	2	13	Menge
2	3	14	Bijektion
3	4	35	Relation und Quotient
4	6	28	Struktur und Auswertung
5	9	10	Strukturelle Induktion

Korrektur:

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte	13	14	35	28	10	100
Erreicht						
Korrektor						
Einsicht						

Aufgabe 1: Menge *(13 Punkte)*

a. *(7 Punkte)* (*)
Beweise:

$$\forall A, B \,.\; (A \cup B) \setminus B = A \setminus B$$

Achtung:

- Es darf vorausgesetzt werden, dass für alle $p \in \mathbb{B} = \{ \mathsf{T}, \mathsf{F} \}$ gilt:
  (1): $p \land \neg p \equiv \mathsf{F}$ und
  (2): $p \lor \mathsf{F} \equiv p$.
- Begründe jeden Schritt.
- Lasse keine Schritte aus.
- Verwende keine Wahrheitstafeln.

b. *(3 Punkte)* (*)
Berechne: $\mathcal{P}(\{ \mathsf{0} \}) \times \{ \mathsf{a}, \mathsf{b} \}$
Achtung: Gib keine Zwischenschritte an.

c. *(3 Punkte)* (*)
Fülle die Lücke mit einem möglichst einfachen Ausdruck, so dass die Aussage gilt.

$$\forall A, B \,.\; \boxed{} \Leftrightarrow (A \cup B = A \cap B)$$

Aufgabe 2: Bijektion ***(14 Punkte)***

a. *(4 Punkte)* (*)
Keuze die korrekten Aussagen an.
Für jedes falsche Kreuz bekommt ihr einen Punkt Abzug.
Bei dieser Teilaufgabe bekommt ihr mindestens 0 Punkte.

Achtung: Die Fälle eins und zwei überlappen einander jeweils teilweise.
Für alle abzählbar unendlichen Mengen A und B gilt:
☐ $A \setminus B$ ist abzählbar endlich oder abzählbar unendlich.
☐ $A \setminus B$ ist abzählbar unendlich.
☐ $A \setminus B$ ist überabzählbar.
☐ $A \cup B$ ist abzählbar endlich oder abzählbar unendlich.
☐ $A \cup B$ ist abzählbar unendlich.
☐ $A \cup B$ ist überabzählbar.
☐ $\mathcal{P}(A)$ ist abzählbar endlich oder abzählbar unendlich.
☐ $\mathcal{P}(A)$ ist abzählbar unendlich.
☐ $\mathcal{P}(A)$ ist überabzählbar.

b. *(3 Punkte)* (*)
Seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ beliebige Bijektionen.
Gib an: Eine Bijektion $h : A \times C \to B \times D$.

c. *(7 Punkte)* (**)
Seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ beliebige Bijektionen.
Gib an: Eine Bijektion $h : A \uplus C \to B \uplus D$.

Matrikelnummer: ____________________ *Name:* ____________________

Aufgabe 3: Relation und Quotient ***(35 Punkte)***

a. Sei $R_1 \subseteq [0, 5] \times [0, 5]$ definiert durch $R_1 \triangleq \{\ (\ x,\ y\ ) \in [0, 5] \times [0, 5]\ \mid\ y = 2 * x - 1\ \}$.

i) *(4 Punkte)* (*)
Visualisiere R_1.

ii) *(3 Punkte)* (*)
Visualisiere $\mathrm{r}(\mathrm{t}(\mathrm{s}(R_1)))$.

iii) *(3 Punkte)* (*)
Gib an: $\#\left([0, 5]/\mathrm{r}(\mathrm{t}(\mathrm{s}(R_1)))\right)$.

iv) *(5 Punkte)* (**)
Visualisiere eine minimale Relation PO mit $R_1 \subseteq PO$, so dass PO eine partielle Ordnung ist und $\#\left([0, 5]/\mathrm{s}(PO)\right) = 2$ gilt.

b. *(6 Punkte)* (*)
Sei $R_2 \subseteq [0, 3] \times [0, 3]$ definiert durch $R_2 \triangleq \mathrm{t}(\mathrm{r}(\{\ (\ 1,\ 2\ ),\ (\ 0,\ 3\ ),\ (\ 2,\ 0\ )\ \}))$.
Sortiere die Worte 20313, 1230, 2301 und 2031.

	$\ll_{R_2}$		$\ll_{R_2}$		$\ll_{R_2}$	
	$\ll^{\mathsf{S}}_{R_2}$		$\ll^{\mathsf{S}}_{R_2}$		$\ll^{\mathsf{S}}_{R_2}$	

c. *(7 Punkte)* (**)
Gib an: Äquivalenzen $R_a, R_b \subseteq [0, 2] \times [0, 2]$, deren Komposition keine Äquivalenz ist.

d. *(7 Punkte)* (***)
Seien A, B beliebig mit $A \subseteq B$ und $B \neq \emptyset$.
Sei χ_A mit

$$\chi_A : B \to \{\ 0,\ 1\ \}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

gegeben.
Beweise: $A = B \Rightarrow B/\mathrm{Ker}(\chi_A) = \{\ B\ \}$.

Aufgabe 4: Struktur und Auswertung ***(28 Punkte)***

Wir definieren (wie in der ZK) zwei totale Abbildungen:

$$\mathsf{head} : \{\, 0,\ 1 \,\}^* \setminus \{\, \lambda \,\} \to \{\, 0,\ 1 \,\} \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1$$

$$\mathsf{tail} : \{\, 0,\ 1 \,\}^* \setminus \{\, \lambda \,\} \to \{\, 0,\ 1 \,\}^* \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, \ldots, x_n)$$

Die Signatur Σ mit Σ-Algebra A ist wie folgt definiert.

Σ	A
data	$A_{\mathsf{data}} \triangleq \{\, 0,\ 1 \,\}$
coll	$A_{\mathsf{coll}} \triangleq A^*_{\mathsf{data}} \cup \{\, \diamond \,\}$
bool	$A_{\mathsf{bool}} \triangleq \{\, \mathsf{M},\ \mathsf{T},\ \mathsf{V} \,\}$
$\mathsf{null} : (\ \mathsf{data}\ )$	$\mathsf{null}_A : A_{\mathsf{data}}$, $\mathsf{null}_A \triangleq 0$
$\mathsf{fail} : (\ \mathsf{coll}\ )$	$\mathsf{fail}_A : A_{\mathsf{coll}}$, $\mathsf{fail}_A \triangleq \diamond$
$\mathsf{swap} : (\ \mathsf{data},\ \mathsf{data}\ )$	$\mathsf{swap}_A : A_{\mathsf{data}} \to A_{\mathsf{data}}$, $x \mapsto \lvert x - 1 \rvert$
$\mathsf{restart} : (\ \mathsf{coll},\ \mathsf{coll}\ )$	$\mathsf{restart}_A : A_{\mathsf{coll}} \to A_{\mathsf{coll}}$, $x \mapsto \begin{cases} \lambda & , x = \diamond \\ x \cdot x & , x \neq \diamond \end{cases}$
$\mathsf{pow} : (\ \mathsf{data},\ \mathsf{coll},\ \mathsf{coll}\ )$	$\mathsf{pow}_A : A_{\mathsf{data}} \times A_{\mathsf{coll}} \to A_{\mathsf{coll}}$, $(\ v,\ x\ ) \mapsto \begin{cases} \diamond & , x = \diamond \\ v \cdot x & , \text{sonst} \end{cases}$
$\mathsf{div} : (\ \mathsf{coll},\ \mathsf{coll}\ )$	$\mathsf{div}_A : A_{\mathsf{coll}} \to A_{\mathsf{coll}}$, $x \mapsto \begin{cases} \diamond & , x \in \{\, \lambda,\ \diamond \,\} \\ \mathrm{tail}(x) & , \text{sonst} \end{cases}$
$\mathsf{mod} : (\ \mathsf{coll},\ \mathsf{data}\ )$	$\mathsf{mod}_A : A_{\mathsf{coll}} \to A_{\mathsf{data}}$, $x \mapsto \begin{cases} \diamond & , x \in \{\, \lambda,\ \diamond \,\} \\ \mathrm{head}(x) & , \text{sonst} \end{cases}$
$\mathsf{even} : (\ \mathsf{coll},\ \mathsf{bool}\ )$	$\mathsf{even}_A : A_{\mathsf{coll}} \to A_{\mathsf{bool}}$, $x \mapsto \begin{cases} \mathsf{M} & , \mathsf{mod}_A(x) = \diamond \\ \mathsf{V} & , \mathsf{mod}_A(x) = 1 \\ \mathsf{T} & , \mathsf{mod}_A(x) = 0 \end{cases}$
$\mathsf{round} : (\ \mathsf{coll},\ \mathsf{coll}\ )$	$\mathsf{round}_A : A_{\mathsf{coll}} \to A_{\mathsf{coll}}$, $x \mapsto \mathsf{pow}_A(\mathsf{null}_A, \mathsf{mod}_A(x))$

Das Variablensystem X und die Variablenbelegung α sind wie folgt definiert.

$$X \triangleq (X_s)_{s \in \{\, \mathsf{data},\, \mathsf{coll},\, \mathsf{bool} \,\}} \qquad \alpha : X \to A$$

$$X_{\mathsf{data}} \triangleq \{\, \mathsf{d}_1,\ \mathsf{d}_2 \,\} \qquad \alpha \triangleq (\alpha_s : X_s \to A_s)_{s \in \{\, \mathsf{data},\, \mathsf{coll},\, \mathsf{bool} \,\}}$$

$$X_{\mathsf{coll}} \triangleq \{\, \mathsf{c}_1,\ \mathsf{c}_2 \,\} \qquad \alpha_{\mathsf{data}} \triangleq \{\, (\ \mathsf{d}_1,\ 1\ ),\ (\ \mathsf{d}_2,\ 0\ ) \,\} \subseteq X_{\mathsf{data}} \times A_{\mathsf{data}}$$

$$X_{\mathsf{bool}} \triangleq \{\, \mathsf{t} \,\} \qquad \alpha_{\mathsf{coll}} \triangleq \{\, (\ \mathsf{c}_1,\ \diamond\ ),\ (\ \mathsf{c}_2,\ 1101\ ) \,\} \subseteq X_{\mathsf{coll}} \times A_{\mathsf{coll}}$$

$$\alpha_{\mathsf{bool}} \triangleq \{\, (\ \mathsf{t},\ \mathsf{M}\ ) \,\} \subseteq X_{\mathsf{bool}} \times A_{\mathsf{bool}}$$

a. *(2 Punkte)* (*)
Für alle Signaturen gilt:
Wenn es keine Konstanten in der Signatur gibt,
dann gibt es keine Grundterme.
☐ Wahr
☐ Falsch

b. *(3 Punkte)* (*)
Gib die Menge von Grundtermen zur Sorte data explizit an.
Hinweis: Die allgemeine Definition aus der Formelsammlung ist nicht gefragt.
Hinweis: Gib $T_{\Sigma,\mathsf{coll}}$ und $T_{\Sigma,\mathsf{bool}}$ nicht an.

$$T_{\Sigma,\mathsf{data}} =$$

c. *(9 Punkte)* (*)
Berechne: $\mathrm{xeval}^{\alpha,A}_{\mathsf{coll}}(\mathsf{round}(\mathsf{pow}(\mathsf{d}_1, \mathsf{pow}(\mathsf{swap}(\mathsf{d}_2), \mathsf{restart}(\mathsf{c}_1)))))$
Hinweis: Gib mindestens drei bedeutsame Schritte an.

d. *(7 Punkte)* (*)
Gib an: $\beta : X \to A$ und $f \in \{\ \mathsf{restart},\ \mathsf{round},\ \mathsf{div}\ \}$, so dass
$\mathrm{xeval}^{\beta,A}_{\mathsf{coll}}(f(\mathsf{pow}(\mathsf{swap}(\mathsf{d}_1), \mathsf{pow}(\mathsf{mod}(\mathsf{c}_1), \mathsf{restart}(\mathsf{div}(\mathsf{c}_2)))))) = \mathsf{01}$.

e. *(7 Punkte)* (**)
Gib an: Eine Untersignatur Σ_U von Σ, so dass

- $\mathrm{eval}^{A\restriction\Sigma_U}$ injektiv ist und
- die Anzahl an Operatornamen von Σ_U maximal ist.

Nenne dafür nur die aus Σ entfernten Sorten und Operatornamen.

Aufgabe 5: Strukturelle Induktion *(10 Punkte)*

(**)

Gegeben ist ein Redukt der vorigen Algebra.

Σ'	B
data	$B_{\mathsf{data}} \triangleq \{ 0,\ 1 \}$
coll	$B_{\mathsf{coll}} \triangleq B^*_{\mathsf{data}} \cup \{ \diamond \}$
bool	$B_{\mathsf{bool}} \triangleq \{ \mathsf{M},\ \mathsf{T},\ \mathsf{V} \}$
$\mathsf{null} : (\ \mathsf{data}\ )$	$\mathsf{null}_B : B_{\mathsf{data}}$ $\mathsf{null}_B \triangleq 0$
$\mathsf{fail} : (\ \mathsf{coll}\ )$	$\mathsf{fail}_B : B_{\mathsf{coll}}$ $\mathsf{fail}_B \triangleq \diamond$
$\mathsf{restart} : (\ \mathsf{coll},\ \mathsf{coll}\ )$	$\mathsf{restart}_B : B_{\mathsf{coll}} \to B_{\mathsf{coll}}$ $x \mapsto \begin{cases} \lambda & , x = \diamond \\ x \cdot x & , x \neq \diamond \end{cases}$
$\mathsf{even} : (\ \mathsf{coll},\ \mathsf{bool}\ )$	$\mathsf{even}_B : B_{\mathsf{coll}} \to B_{\mathsf{bool}}$ $x \mapsto \begin{cases} \mathsf{M} & , \mathsf{mod}_B(x) = \diamond \\ \mathsf{V} & , \mathsf{mod}_B(x) = 1 \\ \mathsf{T} & , \mathsf{mod}_B(x) = 0 \end{cases}$
$\mathsf{mod} : (\ \mathsf{coll},\ \mathsf{data}\ )$	$\mathsf{mod}_B : B_{\mathsf{coll}} \to B_{\mathsf{data}}$ $x \mapsto \begin{cases} \diamond & , x \in \{ \lambda, \diamond \} \\ \mathrm{head}(x) & , \text{sonst} \end{cases}$

Hinweis: Das verwendete Induktionsschema muss in dieser Aufgabe nur angegeben werden, falls es sich nicht aus der restlichen Lösung eindeutig ergibt.

Beweise:

$$\forall s \in \{ \mathsf{bool},\ \mathsf{data},\ \mathsf{coll} \} \,.\, \forall t \in T_{\Sigma',s} \,.\, t \in T_{\Sigma',\mathsf{coll}} \Rightarrow P(t)$$

mit

$$P(t) \triangleq \mathrm{eval}^B_{\mathsf{coll}}(t) = \lambda \lor \mathrm{eval}^B_{\mathsf{coll}}(t) = \diamond$$

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :