

TheGI 1: Grundlagen und Algebraische Strukturen

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 4. April 2011

Schriftliche Leistungskontrolle (EK-N)

Hinweis:

- Für diese schriftliche Leistungskontrolle gelten alle Hinweise, die in der Ankündigung der Kontrolle aufgelistet waren. Diese Hinweise sind bei Bedarf während der Leistungskontrolle verfügbar (Handzeichen genügt).

Studentenidentifikation:

NACHNAME	
VORNAME	
MATRIKELNUMMER	
STUDIENGANG	<input type="checkbox"/> Informatik Bachelor, <input type="checkbox"/> _____
TUTOR	<input type="checkbox"/> Christina, <input type="checkbox"/> Florian, <input type="checkbox"/> Katja, <input type="checkbox"/> Mascha, <input type="checkbox"/> Paul <input type="checkbox"/> Sarkaft, <input type="checkbox"/> Sven, <input type="checkbox"/> Tim, <input type="checkbox"/> Tsveti, <input type="checkbox"/> Uwe

Aufgabenübersicht:

AUFGABE	SEITE	PUNKTE	THEMENBEREICH
1	2	22	Homomorphismen
2	5	26	Kongruenzen
3	8	33	Grammatiken
4	12	15	Reguläre Ausdrücke
5	14	4	Pumping Lemma

Korrektur:

AUFGABE	1	2	3	4	5	Σ
PUNKTE	22	26	33	15	4	100
ERREICHT						
KORREKTOR						
EINSICHT						

Aufgabe 1: Homomorphismen

(22 Punkte)

Gegeben seien die Signatur Σ_{foo} und die Σ_{foo} -Algebren A und B :

Σ_{foo}	A	B
s	$A_s \triangleq \{ a \}^*$	$B_s \triangleq \mathbb{R}$
$const : (s)$	$const_A : A_s$ $const_A \triangleq \lambda$	$const_B : B_s$ $const_B \triangleq 0$
$one : (s, s)$	$one_A : A_s \rightarrow A_s$ $w \mapsto aw$	$one_B : B_s \rightarrow B_s$ $x \mapsto x + 1$
$two : (s, s, s)$	$two_A : A_s \times A_s \rightarrow A_s$ $(w_1, w_2) \mapsto w_1 \cdot w_2$	$two_B : B_s \times B_s \rightarrow B_s$ $(x, y) \mapsto x + y$

a. (9 Punkte) (**)

Beweise oder widerlege: Es existiert ein Σ_{foo} -Homomorphismus $f : B \rightarrow A$.

Hinweis: Falls f existiert, muss nur die Operationsverträglichkeit explizit nachgewiesen werden.

Matrikelnummer: _____ Name: _____

b. (10 Punkte) (***)

Beweise oder widerlege: Es existiert ein Σ_{foo} -Homomorphismus $g : A \rightarrow B$.

Hinweis: Falls g existiert, muss nur die Operationsverträglichkeit explizit nachgewiesen werden.

Matrikelnummer: _____ Name: _____

c. (3 Punkte) (*)

Beweise oder widerlege: Es existiert ein $\Sigma_{f_{00}}$ -Isomorphismus $h : B \rightarrow A$.

Aufgabe 2: Kongruenzen

(26 Punkte)

Gegeben seien die folgende Signatur und Algebren:

Σ_{bar}	A	B
low	$A_{low} \triangleq \mathbb{R}$	$B_{low} \triangleq \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$
high	$A_{high} \triangleq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$	$B_{high} \triangleq \mathbb{N}$
bot : (low)	$bot_A : A_{low}$ $bot_A \triangleq 0$	$bot_B : B_{low}$ $bot_B \triangleq \emptyset$
top : (high)	$top_A : A_{high}$ $top_A \triangleq (0, 0)$	$top_B : B_{high}$ $top_B \triangleq 0$
one : (high, low)	$one_A : A_{high} \rightarrow A_{low}$ $(a, b) \mapsto \sqrt{a^2 + b^2}$	$one_B : B_{high} \rightarrow B_{low}$ $n \mapsto \{n\}$
two : (low, high, high)	$two_A : A_{low} \times A_{high} \rightarrow A_{high}$ $(a, (x, y)) \mapsto (a * x, a * y)$	$two_B : B_{low} \times B_{high} \rightarrow B_{high}$ $(X, n) \mapsto \#(X \cup \{n\})$

Wobei $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ die Menge aller endlichen Teilmengen von \mathbb{N} bezeichnet.

a. (9 Punkte) (**)

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

Für jedes falsche Kreuz bekommst Du einen Punkt Abzug.

Bei dieser Teilaufgabe bekommst Du mindestens 0 Punkte.

- richtig - falsch $one_A(top_A) = bot_A$
- richtig - falsch $one_A((3, 4)) = 5$
- richtig - falsch $\forall x \in A_{high}.one_A(x) \geq 0$
- richtig - falsch $two_A(2, (3, 4)) = (6, 12)$
- richtig - falsch $one_B(top_B) = bot_B$
- richtig - falsch $two_B(\emptyset, 0) = 0$
- richtig - falsch $\forall X \in B_{low}.two_B(X, 42) \neq \#(X)$
- richtig - falsch $two_B(\{0, 1, 2, 3, 4\}, 5) = 5$
- richtig - falsch $\exists n \in B_{high}.one_B(n) = \emptyset$

Matrikelnummer: _____ Name: _____

b. (10 Punkte) (**)

Sei $K = (K_s : A_s \times A_s)_{s \in \{ \text{low}, \text{high} \}}$ mit

$$K_{\text{low}} = \Delta_{\mathbb{R}}$$

$$K_{\text{high}} = \{ ((a, b), (x, y)) \mid a^2 - x^2 = y^2 - b^2 \}$$

Beweise, dass K eine Kongruenz auf A ist.

Hinweis: Es genügt, die Operationsverträglichkeit nachzuweisen.

c. (7 Punkte) (**)

Sei $K = (K_s : B_s \times B_s)_{s \in \{ \text{low}, \text{high} \}}$ mit

$$K_{\text{low}} = \{ (X, Y) \mid \#(X) = \#(Y) \}$$

$$K_{\text{high}} = \{ (a, b) \mid a \bmod 2 = b \bmod 2 \}$$

Beweise, dass K **keine** Kongruenz auf B ist.

Aufgabe 3: Grammatiken

(33 Punkte)

a. (9 Punkte) (**)

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

Für jedes falsche Kreuz bekommt ihr einen Punkt Abzug.

Bei dieser Teilaufgabe bekommt ihr mindestens 0 Punkte.

Für alle Grammatiken $G = (V, \mathcal{A}, P, S)$ gilt:

- richtig - falsch Wenn $\mathcal{A} = \{ a \}$ ist, dann ist $L(G) = \{ a \}^*$
- richtig - falsch Wenn es eine Produktionsregel der Form $S \rightarrow S$ gibt, dann erzeugt die Grammatik die leere Sprache.
- richtig - falsch Wenn $P = \{ S \rightarrow S \}$, dann ist $L(G) = \{ \lambda \}$
- richtig - falsch Wenn $P = \{ S \rightarrow S \}$, dann ist $L(G) = \emptyset$
- richtig - falsch Wenn $\{ S \rightarrow \lambda \} \in P$, dann ist $L(G) = \{ \lambda \}$
- richtig - falsch Wenn $L(G) = \emptyset$, dann hat jede Regel mindestens ein Nichtterminal auf der rechten Seite.
- richtig - falsch Wenn jede Regel mindestens ein Nichtterminal auf der rechten Seite hat, dann ist $L(G) = \emptyset$.
- richtig - falsch Wenn G eine Sprache des Typs 2 erzeugt, dann hat diese Sprache auch den Typ 1.
- richtig - falsch Wenn G den Typ 2 hat, dann hat G auch den Typ 1.

b. (*)

Gegeben seien

$$\mathcal{A} = \{ a, b, c \}$$

$$G_i = (\{ S, T, U \}, \mathcal{A}, P_i, S)$$

$$P_1 : S \rightarrow cS \mid Tac$$

$$T \rightarrow \lambda \mid U$$

$$U \rightarrow abSc$$

$$P_2 : S \rightarrow aS \mid bS \mid abcT$$

$$T \rightarrow bT \mid cT \mid cU$$

$$U \rightarrow ba$$

$$P_3 : S \rightarrow SaT \mid abT$$

$$T \rightarrow c \mid aaU$$

$$U \rightarrow a$$

$$aa \rightarrow bbb$$

$$P_4 : S \rightarrow a \mid b \mid \lambda \mid T$$

$$T \rightarrow SU$$

$$aa \rightarrow U$$

$$U \rightarrow \lambda$$

i) (8 Punkte) (*)

Entscheide durch Eintragen von \checkmark (= ja) und X (= nein), ob die entsprechende Grammatik vom jeweiligen Typ ist. Für falsche Antworten werden Dir Punkte abgezogen. Du bekommst bei dieser Aufgabe mindestens 0 Punkte.

	Typ 0	Typ 1	Typ 2	Typ 3
G_1				
G_2				
G_3				
G_4				

Matrikelnummer: _____ Name: _____

ii) (5 Punkte) (**)

Gib eine Ableitung des Wortes $abbbbaac$ in G_3 an.

iii) (4 Punkte) (*) Gib für jede Grammatik 2 Wörter der durch sie erzeugten Sprache an.

Matrikelnummer: _____ Name: _____

iv) (7 Punkte) (**) Gib $L(G_2)$ und $L(G_4)$ in Mengenschreibweise an.

Aufgabe 4: Reguläre Ausdrücke

(15 Punkte)

a. (4 Punkte) (*) Gib einen regulären Ausdruck R_1 an, so dass

$$L(R_1) = \{ b^n b a^{2n} \mid n \in [1, 3] \}$$

b. (5 Punkte) (*)

Gegeben sei

$$R_2 = a(a + b)(ab^*) + bba$$

Gib eine Grammatik G an, so dass $L(G) = L(R_2)$

c. (6 Punkte) (*) Gegeben seien

$$R_3 = ab(a^* + b^*)$$

$$R_4 = (a + b)a^*(b + b)^*$$

$$R_5 = (a + b)(b + a)(\varepsilon + 0)$$

Entscheide durch Eintragen von \checkmark (= ja) und X (= nein), ob das entsprechende Wort in der von dem regulären Ausdruck erzeugten Sprache liegt.

	R_3	R_4	R_5
λ			
bb			
$aaabbb$			
abb			

Aufgabe 5: Pumping Lemma

(4 Punkte)

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

Für jedes falsche Kreuz bekommst Du einen Punkt Abzug.

Bei dieser Aufgabe bekommst Du mindestens 0 Punkte.

Für alle Sprachen A gilt:

- richtig - falsch Wenn man $\neg\mathbf{PUMP}(A)$ zeigen kann, dann ist A nicht regulär.
- richtig - falsch Wenn man $\mathbf{PUMP}(A)$ zeigen kann, dann ist A regulär.
- richtig - falsch Wenn A durch eine reguläre Grammatik erzeugt wird, dann kann man $\mathbf{PUMP}(A)$ zeigen.
- richtig - falsch Wenn A durch eine nicht-reguläre Grammatik erzeugt wird, dann kann man $\neg\mathbf{PUMP}(A)$ zeigen.

Matrikelnummer: _____ Name: _____

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :