TheGI 1: Grundlagen und Algebraische Strukturen

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 4. Januar 2011

Schriftliche Leistungskontrolle (ZK)

Studentenidentifikation:

Nachname	
Vorname	
Matrikelnummer	
Studiengang	☐ Informatik Bachelor, ☐ ________________________
Tutor	☐ Christina,☐ Florian,☐ Katja,☐ Mascha,☐ Paul, ☐ Sarkaft,☐ Sven,☐ Tim,☐ Tsveti,☐ Uwe

Aufgabenübersicht:

Aufgabe	Seite	Punkte	Themenbereich
1	2	15	Menge
2	3	17	Abbildung
3	4	30	Relation und Quotient
4	6	26	Struktur und Auswertung
5	10	12	Induktion

Korrektur:

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte	15	17	30	26	12	100
Erreicht						
Korrektor						
Einsicht						

Aufgabe 1: Menge ***(15 Punkte)***

a. *(8 Punkte)* (**)
Kreuze genau die richtigen Aussagen an.
Achtung: Für falsch gesetzte Kreuze erhältst du Punktabzüge.
☐ $\forall A, B, C \ . \ (A \setminus B) \cap C = ((A \cup (B \cup C)) \setminus B) \cap (A \cap C)$
☐ $\mathbb{N} = \{ \ x \in \mathbb{N} \ \mid \ x > 10 \Rightarrow x > 5 \ \}$
☐ $\#(\{ \ A \ \mid \ A \subseteq \mathbb{N} \ \}) \neq \infty$

b. *(3 Punkte)* (*)
Fülle die Lücke mit einem möglichst einfachen Ausdruck, so dass die Aussage gilt.

$$\forall A, B \ . \ \boxed{} \Leftrightarrow (A \setminus B = B \setminus A)$$

c. *(4 Punkte)* (*)
Gib explizit an: $\mathcal{P}(\{ \ \mathsf{0} \ \} \times \{ \ \mathsf{a}, \ \mathsf{b} \ \})$
Achtung: Für Zwischenschritte gibt es keine Punkte.

Matrikelnummer: ____________________ *Name:* ____________________

Aufgabe 2: Abbildung *(17 Punkte)*

a. *(4 Punkte)* (*)
Gib explizit an: $f_1 : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ mit f_1 ist injektiv, surjektiv und *nicht* total.

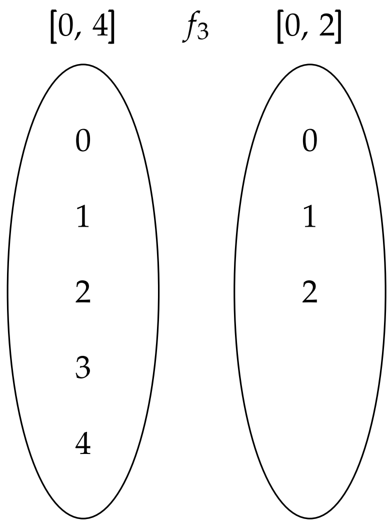
b. *(5 Punkte)* (*)
Beweise: f_1 ist surjektiv.

c. *(8 Punkte)* (**)
Sei $\mathcal{A} = \{ \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \}$ ein beliebiges Alphabet.
Gib explizit an: eine Bijektion $\underline{f_2} : \{ \mathsf{a}^{312 * n} \mid n \in \mathbb{N}^+ \} \to \mathbb{N}$.
Gib explizit an: eine Bijektion $\overline{f_2} : \mathbb{N} \to \{ \mathsf{a}^{312 * n} \mid n \in \mathbb{N}^+ \}$.

Aufgabe 3: Relation und Quotient ***(30 Punkte)***

a. Sei $f_3 \triangleq \{ \ (\ 0,\ 0\ ),\ (\ 1,\ 2\ ),\ (\ 2,\ 1\ ),\ (\ 3,\ 2\ ),\ (\ 4,\ 0\ )\ \} : [0, 4] \rightarrow [0, 2]$.
und sei $R_1 \triangleq \{ \ (\ x,\ y\ ) \in [0, 4] \times [0, 4] \ \mid \ f_3(x) \leq f_3(y) \ \}$.

i) *(2 Punkte)* (*)
Visualisiere f_3.



ii) *(8 Punkte)* (**)
Visualisiere R_1.

1 3

2

0 4

iii) *(5 Punkte)* (**)
Visualisiere eine kleinste Relation R_2 mit $R_1 = \mathrm{t}(\mathrm{r}(R_2))$.

1 3

2

0 4

iv) *(3 Punkte)* (*)
Kreuze genau die richtigen Aussagen an.
Achtung: Für falsch gesetzte Kreuze erhältst du Punktabzüge.

R_1 ist:
☐ homogen
☐ reflexiv
☐ irreflexiv
☐ symmetrisch
☐ antisymmetrisch
☐ transitiv

b. *(6 Punkte)* (*)
Sei $R_3 \triangleq \mathrm{t}(\mathrm{r}(\{\ (\ 0,\ 3\ ),\ (\ 3,\ 2\ ),\ (\ 2,\ 1\ )\ \})) : [0, 3] \times [0, 3]$.
Sortiere die Worte 3210, 3201, 320132 und 320123.

	$\ll_{R_3}$		$\ll_{R_3}$		$\ll_{R_3}$	
	$\ll^{\mathsf{S}}_{R_3}$		$\ll^{\mathsf{S}}_{R_3}$		$\ll^{\mathsf{S}}_{R_3}$	

c. *(6 Punkte)* (**)
Kreuze genau die richtigen Aussagen an.
Achtung: Für falsch gesetzte Kreuze erhältst du Punktabzüge.
☐ Wenn $R : A \times A$ eine Äquivalenz ist,
dann gibt es ein $f : A \to B$ mit $\mathrm{Ker}(f) = R$.
☐ Sei $\mathrm{nat} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}/R$ mit $x \mapsto [\ x\ ]_R$ die natürliche Abbildung.
Wenn nat injektiv ist, dann ist $R = \Delta_{\mathbb{N}}$.
☐ Wenn $f_1, f_2 : A \to B$ totale Abbildungen sind mit $f_1(A) \subseteq f_2(A)$,
dann ist $\mathrm{Ker}(f_1) \subseteq \mathrm{Ker}(f_2)$.

Aufgabe 4: Struktur und Auswertung ***(26 Punkte)***

Betrachte die Signatur Σ_{Matrix} mit den Σ_{Matrix}-Algebren Mat_1 und Mat_2.
Das Variablensystem X und die Variablenbelegung α sind wie folgt definiert.

$$X \triangleq (X_s)_{s\in\{\,\mathsf{nat},\,\mathsf{matrix}\,\}} \qquad \alpha : X \to Mat_1$$

$$X_{\mathsf{nat}} \triangleq \{\ \mathsf{n}_1,\ \mathsf{n}_2,\ \mathsf{n}_3\ \} \qquad \alpha \triangleq (\alpha_s : X_s \to Mat_{1s})_{s\in\{\,\mathsf{nat},\,\mathsf{matrix}\,\}}$$

$$X_{\mathsf{matrix}} \triangleq \{\ \mathsf{m}_1,\ \mathsf{m}_2\ \} \qquad \alpha_{\mathsf{nat}} \triangleq \{\ (\ \mathsf{n}_1,\ 6\ ),\ (\ \mathsf{n}_2,\ 4\ ),\ (\ \mathsf{n}_3,\ 17\ )\ \}$$

$$\alpha_{\mathsf{matrix}} \triangleq \{\ (\ \mathsf{m}_1,\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\ ),\ (\ \mathsf{m}_2,\ \begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\ )\ \}$$

a. *(3 Punkte)* (*)
Kreuze genau die richtigen Aussagen an.
Achtung: Für falsch gesetzte Kreuze erhältst du Punktabzüge.

Für alle Signaturen $\Sigma = (S, O, ar)$ gilt:
Wenn es keine Grundterme zur Sorte $s \in S$ gibt,
dann gibt es keine Operatornamen zur Sorte s (also $O_s = \emptyset$).
☐ Wahr
☐ Falsch

b. *(4 Punkte)* (*)
Gib explizit an: die Menge von Grundtermen zur Sorte matrix.
Hinweis: Gib $\mathrm{T}_{\Sigma_{Matrix},\mathsf{nat}}$ *nicht an.*

$$\mathrm{T}_{\Sigma_{Matrix},\mathsf{matrix}} =$$

c. *(5 Punkte)* (*)
Berechne: $\mathrm{xeval}^{\alpha,Mat_1}_{\mathsf{matrix}}(\mathsf{add}(\mathsf{unit},\mathsf{make}(\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(\mathsf{z})),\mathsf{z},\mathsf{n}_1,\mathsf{plus}(\mathsf{z},\mathsf{succ}(\mathsf{n}_2)))))$
Hinweis: Gib mindestens drei bedeutsame Schritte an.

d. *(4 Punkte)* (*)
Gib an: $\beta : X \rightarrow Mat_1$ und $t \in \mathrm{T}_{\Sigma_{Matrix},\mathsf{nat}}$, so dass
$\mathrm{xeval}^{\beta, Mat_1}_{\mathsf{matrix}}(\mathsf{add}(\mathsf{add}(m_2, m_1), \mathsf{make}(n_1, n_2, n_3, t))) = \begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 17 & 4 \end{pmatrix}$.

e. *(4 Punkte)* (***)
Gib an: Eine Untersignatur Σ^U_{Matrix} von Σ_{Matrix}, so dass
- $\mathrm{eval}^{Mat_1 \upharpoonright_{\Sigma^U_{Matrix}}}_{\mathsf{matrix}}$ surjektiv ist und
- die Anzahl an Operatornamen von Σ^U_{Matrix} minimal ist.

Nenne dafür nur die aus Σ_{Matrix} entfernten Sorten und Operatornamen.

f. *(6 Punkte)* (**)
Das Variablensystem Y ist wie folgt definiert.

$$
\begin{aligned}
Y &\triangleq (Y_s)_{s \in \{\ \mathsf{nat}, \mathsf{matrix}\ \}} \\
Y_{\mathsf{nat}} &\triangleq \{\ \mathsf{n}_1,\ \mathsf{n}_2,\ \mathsf{n}_3,\ \mathsf{n}_4,\ \mathsf{n}_5,\ \mathsf{n}_6,\ \mathsf{n}_7,\ \mathsf{n}_8\ \} \\
Y_{\mathsf{matrix}} &\triangleq \emptyset
\end{aligned}
$$

Vervollständige die rechte Seite, so dass die Algebra Mat_2 die Gleichungen erfüllt. Verwende dazu auf der rechten Seite nur die Operatornamen z, succ und make sowie Variablen; in den letzten beiden Gleichungen dürfen zusätzlich e und plus verwendet werden.
Achtung: Bei dieser Teilaufgabe geht es um Mat_2; nicht um Mat_1.

$\mathsf{e} =$

$\mathsf{unit} =$

$\mathsf{zero} =$

$\mathsf{plus}(\mathsf{z}, \mathsf{n}_1) =$

$\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(\mathsf{n}_1), \mathsf{n}_2) =$

$\mathsf{succ}(\qquad)$

$\mathsf{add}(\mathsf{make}(\mathsf{n}_1, \mathsf{n}_2, \mathsf{n}_3, \mathsf{n}_4), \mathsf{make}(\mathsf{n}_5, \mathsf{n}_6, \mathsf{n}_7, \mathsf{n}_8)) =$

Matrikelnummer: ______ Name: ______

Σ_{Matrix}	Mat_1	Mat_2
nat	$Mat_{1\,\mathsf{nat}} \triangleq \mathbb{N}$	$Mat_{2\,\mathsf{nat}} \triangleq \mathbb{N}$
matrix	$Mat_{1\,\mathsf{matrix}} \triangleq \mathbb{N}^{2\times 2}$	$Mat_{2\,\mathsf{matrix}} \triangleq \mathbb{N}$
z : (nat)	$\mathsf{z}_{Mat_1} : Mat_{1\,\mathsf{nat}}$	$\mathsf{z}_{Mat_2} : Mat_{2\,\mathsf{nat}}$
	$\mathsf{z}_{Mat_1} \triangleq 0$	$\mathsf{z}_{Mat_2} \triangleq 0$
e : (nat)	$\mathsf{e}_{Mat_1} : \mathbb{N}$	$\mathsf{e}_{Mat_2} : \mathbb{N}$
	$\mathsf{e}_{Mat_1} \triangleq 1$	$\mathsf{e}_{Mat_2} \triangleq 1$
zero : (matrix)	$\mathsf{zero}_{Mat_1} : Mat_{1\,\mathsf{matrix}}$	$\mathsf{zero}_{Mat_2} : Mat_{2\,\mathsf{matrix}}$
	$\mathsf{zero}_{Mat_1} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathsf{zero}_{Mat_2} \triangleq 0$
unit : (matrix)	$\mathsf{unit}_{Mat_1} : Mat_{1\,\mathsf{matrix}}$	$\mathsf{unit}_{Mat_2} : Mat_{2\,\mathsf{matrix}}$
	$\mathsf{unit}_{Mat_1} \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathsf{unit}_{Mat_2} \triangleq 2$
succ : (nat, nat)	$\mathsf{succ}_{Mat_1} : Mat_{1\,\mathsf{nat}} \to Mat_{1\,\mathsf{nat}}$	$\mathsf{succ}_{Mat_2} : Mat_{2\,\mathsf{nat}} \to Mat_{2\,\mathsf{nat}}$
	$n \mapsto n+1$	$n \mapsto n+1$
plus : (nat, nat, nat)	$\mathsf{plus}_{Mat_1} : Mat_{1\,\mathsf{nat}} \times Mat_{1\,\mathsf{nat}} \to Mat_{1\,\mathsf{nat}}$	$\mathsf{plus}_{Mat_2} : Mat_{2\,\mathsf{nat}} \times Mat_{2\,\mathsf{nat}} \to Mat_{2\,\mathsf{nat}}$
	$(\,n,\ m\,) \mapsto n+m$	$(\,n,\ m\,) \mapsto n+m$
make : (nat, nat, nat, nat, matrix)	$\mathsf{make}_{Mat_1} : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}^{2\times 2}$	$\mathsf{make}_{Mat_2} : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
	$(\,n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4\,) \mapsto \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{pmatrix}$	$(\,n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4\,) \mapsto n_1+n_2+n_3+n_4$
add : (matrix, matrix, matrix)	$\mathsf{add}_{Mat_1} : \mathbb{N}^{2\times 2} \times \mathbb{N}^{2\times 2} \to \mathbb{N}^{2\times 2}$	$\mathsf{add}_{Mat_2} : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
	$\left(\begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} n_1+m_1 & n_2+m_2 \\ n_3+m_3 & n_4+m_4 \end{pmatrix}$	$(\,n_1,\ n_2\,) \mapsto n_1+n_2$

Aufgabe 5: Induktion ***(12 Punkte)***

(**) Seien $f, g : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ wie folgt definiert:

$$f(x) \triangleq \begin{cases} 1 & , \; x = 1 \\ 2 * f(x-1) + 1 & , \; x > 1 \end{cases}$$

$$g(x) \triangleq 2^x - 1$$

Beweise: mittels Induktion $f = g$.

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :