Theoretische Grundlagen der Informatik I

Veranstalter: Hartmut Ehrig, Frank Hermann, Leen Lambers

Probeklausur 2007
(angepasste Klausur vom SoSe 2005)

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Wer 25 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Verschafft Euch zuerst einen Überblick über alle Aufgaben und fangt dann mit der Bearbeitung derjenigen Aufgaben an, die Euch am wenigsten aufwendig erscheinen.
Die häufig geforderten Begründungen meinen keine Beweise, sondern lassen sich kurz in einem Satz abhandeln.
Beginnt bitte jede Aufgabe auf einer neuen Seite. (Wir haben Blätter vorrätig, falls Euer Vorrat verbraucht ist.) Schreibt bitte auf jedes von Euch abgegebene Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer!
Hinter der Aufgabe 5 befindet sich ein Blatt mit zwei Algebren. Reißt dieses Blatt heraus, damit Ihr einen besseren Überblick bewahrt.

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

(Tutorin/Tutor:)

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte	6	6	5	4	4	8	10	7	50

Punkteverteilung (**In der richtigen Klausur NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Note
Punkte										

1. **Grammatiken, Sprachen und Chomsky Hierarchie (6 Punkte)**

   (a) (3 Punkte)
   Gebt zu der Sprache L_1 eine reguläre Grammatik G_1 <u>vollständig</u> an, wobei:

   $$L_1 = \{w|w \in \Sigma_1^*, w \text{ enthält mindestens einmal das Teilwort ``00''}\}, \Sigma_1 = \{0, 1\}$$

   (b) (1 Punkt)
   Gebt die Sprache L_2 an, welche durch die Grammatik G_2 erzeugt wird.
   $\Sigma_2 = \{0, 1, +, (,)\}$
   $G_2 = (N, T, S, R)$
   $N = \{A, S\}$
   $T = \Sigma_2$
   $R: \quad S \rightarrow 0 \mid 1 \mid S + (A)$
   $\quad\quad (A) \rightarrow S$

   (c) (2 Punkte)
   Kreuzt zu den Grammatiken und Sprachen G_1, L_1 aus Aufgabe 1 a) und G_2, L_2 aus Aufgabe 1 b) alle Klassen der Chomsky-Hierarchie an, zu denen sie gehören.

	G_1	G_2
reguläre Grammatiken		
kontextfreie Grammatiken		
kontextsensitive Grammatiken		
allgemeine Grammatiken		

	L_1	L_2
reguläre Sprachen		
kontextfreie Sprachen		
kontextsensitive Sprachen		
allgemeine Sprachen		

2. **Beweise für Sprachen (6 Punkte)**

(a) (4 Punkte)
Beweist die Gleicheit $L_3 = L(G_3)$ mit folgenden Vorgaben: $\Sigma_3 = \{0, 1\}$
$L_3 = \{v1v^{-1} \mid v \in \Sigma_3^*\}$
$G_3 = (N, T, S, R)$
$N = \{S\}$
$T = \{0, 1\}$

$$\begin{array}{llll} R: & ① : & S & \rightarrow xSx, \qquad x \in \Sigma_3 \\ & ② : & S & \rightarrow 1 \end{array}$$

(b) (2 Punkte)
Beweist, dass die Sprache L_3 aus Teil a) nicht regulär ist.
Verwendet dazu die folgende Vorgabe:

Beweis: Annahme: L_3 ist regulär mit Pumpzahl p nach dem Pumping Lemma Sei $w \in L_3$ mit $w = z1z^{-1}$ $w = z_1 \dots z_p 1 z_p \dots z_1, \quad z = z_1 \dots z_p$ $\Rightarrow$ Es existiert eine Zerlegung $uvx = w$ mit $\lvert uv\rvert \leq p$ und $\lvert v\rvert \geq 1$ $\Rightarrow \dots$ $\Rightarrow \dots$ Somit ist die Annahme falsch und L_3 nicht regulär.

3. **Aufgabe, Mengen (5 Punkte)**

(a) **(3 Punkte)** Beweist oder widerlegt für beliebige Mengen A und B (**Bemerkung:** $|A|$ ist die Anzahl der Elemente in der Menge A):

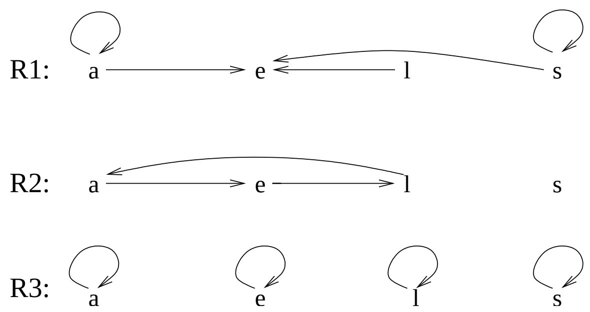
i. $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$

ii. $|\mathcal{P}(A \times B)| = |A \cup B| + |A \cap B|$

(b) **(2 Punkte)** Gebt zu den vorhergehenden Aussagen Belegungen für A, B an, so dass die Gleichungen erfüllt werden. Es soll gelten, dass A und B unterschiedlich und ungleich der leeren Menge sind.

4. **Aufgabe, Relationen und Ordnungen (4 Punkte)**

Betrachtet im Folgenden die Mengen $A = \{a, e, l, s\}$ und $B = \{1, 2\}$ und die Relationen R_1, R_2, R_3 des Typs $A \times A$:



(a) **(2 Punkte)** Gebt eine Relation R des Typs $A \times B$ und eine Relation R' des Typs $B \times A$ an, so dass folgendes gilt:

- R ist rechtstotal, rechtseindeutig, aber nicht linkstotal und nicht linkseindeutig
- $R' \circ R$ ist rechtstotal und linkseindeutig

Stellt R visuell und R' in Mengendarstellung dar.

(b) **(1 Punkt)** Welche der Relationen $R1 - R3$ sind partielle Ordnungen? Begründet für alle anderen, warum sie keine partiellen Ordnungen sind.

(c) **(1 Punkt)** Welche der Relationen $R1 - R3$, die keine partielle Ordnung ist, könnt ihr durch Hinzufügen weiterer Paare zu einer partiellen Ordnung erweitern? Gebt diese Paare für diese Relation an.

5. **Aufgabe, Abbildungen und Repräsentantensystem (4 Punkte)**

(a) **(2 Punkte)** Welche Eigenschaft (injektiv oder surjektiv) trifft auf die folgende Abbildung zu und welche nicht? Beweist eure Aussagen! (**Bemerkung:** $\mathbb{N}$ steht für alle natürlichen Zahlen inkl. der 0.)

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$(n, m) \mapsto n$$

(b) **(1 Punkt)** Gebt das Urbild $f^{-1}(B)$ an, wobei $B = \{100, 200\}$.

(c) **(1 Punkt)** Gebt ein Repräsentantensystem S bzgl. der Quotientenmenge $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_{Ker(f)}$ an.

Seien die Signatur *Firma* und die *Firma*-Algebren A und B für die nachfolgenden Aufgaben der Klausur gegeben:

$Firma =$	**sorts**	menschen, geld	
	opns	prakti:	$\rightarrow$ menschen
		vorgesetzter:	menschen $\rightarrow$ menschen
		minGehalt:	$\rightarrow$ geld
		gehalt:	menschen $\rightarrow$ geld
		erhoehung:	menschen geld $\rightarrow$ geld

A	B
$A_{menschen} = \{p\} \cup \{m_i \mid 1 \leq i \leq 5\}$ $A_{geld} = \{320, 550, 600, 650, 700, 1000\}$	$B_{menschen} = \{p\}$ $B_{geld} = \{320\}$
$prakti_A = p \in A_{menschen}$ $vorgesetzter_A : A_{menschen} \rightarrow A_{menschen}$ $p \mapsto m_1$ $m_i \mapsto m_{i+1}, \quad 1 \leq i < 5$ $m_5 \mapsto m_5$ $minGehalt_A = 320 \in A_{geld}$ $gehalt_A : A_{menschen} \rightarrow A_{geld}$ $p \mapsto 320$ $m_1 \mapsto 550$ $m_2 \mapsto 600$ $m_3 \mapsto 650$ $m_4 \mapsto 700$ $m_5 \mapsto 1000$ $erhoehung_A : A_{menschen} \times A_{geld} \rightarrow A_{geld}$ $(p, z) \mapsto 550$ $(m_1, z) \mapsto 600$ $(m_2, z) \mapsto 650$ $(m_3, z) \mapsto 700$ $(m_4, z) \mapsto 1000$ $(m_5, z) \mapsto 1000$	$prakti_B = p \in B_{menschen}$ $vorgesetzter_B : B_{menschen} \rightarrow B_{menschen}$ $p \mapsto p$ $minGehalt_B = 320 \in B_{geld}$ $gehalt_B : B_{menschen} \rightarrow B_{geld}$ $p \mapsto 320$ $erhoehung_B : B_{menschen} \times B_{geld} \rightarrow B_{geld}$ $(p, 320) \mapsto 320$

6. **Aufgabe, Terme, Auswertung von Termen und Gleichungen (8 Punkte)**

Gegeben sei das Variablensystem $X = (X_{menschen}, X_{geld})$ mit
$X_{menschen} = \{w\}$ und $X_{geld} = \{x\}$.
Sei $ass : X \to A$ eine Variablenbelegung mit

$$\begin{array}{lcl} ass_{menschen}(w) & = & m_3 \\ ass_{geld}(x) & = & 550 \end{array}$$

Außerdem seien
$t := gehalt(vorgesetzter(vorgesetzter(prakti)))$
$u := erhoehung(vorgesetzter(prakti), gehalt(vorgesetzter(prakti)))$
$v := erhoehung(vorgesetzter(w), x)$.

(a) **(1 Punkt)** Gebt einen Grundterm (ungleich zu t, u, v) zur Sorte $geld$ an, der mindestens 3 **verschiedene** Operationssymbole enthält.

(b) **(1 Punkt)** Gebt einen Term mit Variablen (ungleich zu t, u, v) zur Sorte $menschen$ an mit mindestens 3 Operationssymbolen.

(c) **(2 Punkte)** Wertet den Term v schrittweise gemäß der Variablenbelegung $ass : X \to A$ und der Definition von $xeval(ass)$ in der $Firma$-Algebra A aus.
Hinweis: Ihr könnt in dieser und den weiteren Aufgaben die folgenden abkürzenden Schreibweisen verwenden:

$$\begin{array}{lcl} eva_m & =_{def} & xeval(ass)_{menschen} \\ eva_g & =_{def} & xeval(ass)_{geld} \end{array}$$

(d) **(3 Punkte)** Beweist oder widerlegt die Gültigkeit der folgenden Gleichungen in der $Firma$-Algebra A (Hier braucht ihr die Terme nicht schrittweise auswerten.):
$(e1)\ t = u$
$(e2)\ v = erhoehung(prakti, gehalt(vorgesetzter(vorgesetzter(w))))$

(e) **(1 Punkt)** Gebt einen Term t_3 an, sodass t und t_3 für alle Variablenbelegungen in der $Firma$-Algebra A unterschiedlich, aber in der Algebra $Firma$-B gleich ausgewertet werden.

7. **Aufgabe, Homomorphismen und Algebren (10 Punkte)**

(a) **(2 Punkte)**

i. **(1 Punkt)** Gebt einen $Firma$-Homomorphismus $h : A \rightarrow B$ an.

ii. **(1 Punkt)** Beweist, daß h die Homomorphiebedingung für das Operationssymbol $erhoehung$ erfüllt.

(b) **(2 Punkte)** Beweist, daß es keinen $Firma$-Homomorphismus $g : B \rightarrow A$ gibt.

(c) **(6 Punkte)**

i. **(1 Punkt)** Gebt eine nicht leere, echte Untersignatur $Firma'$ von $Firma$ an.

ii. **(1 Punkt)** Gebt eine $Firma'$-Algebra C an, die weder ein $Firma'$-Redukt der $Firma$-Algebra A noch der $Firma$-Algebra B ist.

iii. **(1 Punkt)** Gebt eine Unteralgebra D von B an.

iv. **(3 Punkte)** Beweist oder widerlegt folgende Aussage:
Es gibt eine Unteralgebra A' von A, deren Trägermengen nur 1 Element besitzen.

8. **Aufgabe, Spezifikation und Kongruenzrelation (7 Punkte)**

(a) **(3 Punkte)** Beweist oder widerlegt: $eval(A)_{menschen}$ ist injektiv bzw. surjektiv.

(b) **(3 Punkte)** Definiert eine Kongruenzrelation $R = (R_{menschen}, R_{geld})$ für die Algebra A, sodass $\{(p, m_1), (m_1, p)\} \subseteq R_{menschen}$ ist. Begründet Euer Ergebnis und zeigt die Operationsverträglichkeit für die Operation $vorgesetzter_A$.
Zur Erinnerung: $A_{menschen} = \{p, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$

(c) (1 Punkt) Sei $SPEC = ((Firma, X), \{e1, e2\})$ eine Spezifikation, wobei $X, e1, e2$ aus Aufgabe 6 d) stammen. Ist A eine $SPEC$-Algebra? Begründet Eure Antwort.