Theoretische Grundlagen der Informatik II

Veranstalter: Hartmut Ehrig, Andi Rayo Kniep, Leen Lambers

Probeklausur (Musterlösung) 2007
(angepasste Klausur vom SoSe 2005)

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Wer 25 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Verschafft Euch zuerst einen Überblick über alle Aufgaben und fangt dann mit der Bearbeitung derjenigen Aufgaben an, die Euch am wenigsten aufwendig erscheinen.
Die häufig geforderten Begründungen meinen keine Beweise, sondern lassen sich kurz in einem Satz abhandeln.
Beginnt bitte jede Aufgabe auf einer neuen Seite. (Wir haben Blätter vorrätig, falls Euer Vorrat verbraucht ist.) Schreibt bitte auf jedes von Euch abgegebene Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer!
Hinter der Aufgabe 5 befindet sich ein Blatt mit zwei Algebren. Reißt dieses Blatt heraus, damit Ihr einen besseren Überblick bewahrt.

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

(Tutorin/Tutor:)

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte	6	6	5	4	4	8	10	7	50

Punkteverteilung (**In der richtigen Klausur NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Note
Punkte										

1. **Grammatiken, Sprachen und Chomsky Hierarchie (6 Punkte)**

(a) (3 Punkte)

Lösung:
$G_1 = (N, T, S, R)$
$N = \{A, S\}$
$T = \Sigma_1$
$R: \quad S \rightarrow 0S \mid 1S \mid 00A$
$\quad\quad A \rightarrow 0A \mid 1A \mid \lambda$

(b) (1 Punkt)

Lösung:
$L_2 = \{0, 1\} \cup \{x + y | x, y \in L_2\}$

(c) (2 Punkte)

Lösung:

	G_1	G_2
reguläre Grammatiken	X	
kontextfreie Grammatiken	X	
kontextsensitive Grammatiken		
allgemeine Grammatiken	X	X

	L_1	L_2
reguläre Sprachen	X	X
kontextfreie Sprachen	X	X
kontextsensitive Sprachen	X	X
allgemeine Sprachen	X	X

2. **Beweise für Sprachen (6 Punkte)**

(a) (4 Punkte)

Lösung:
$L_3 \subseteq L(G_3)$
Sei $w \in L_3$, d. h. $w = v_1 \dots v_n 1 v_n \dots v_1, \quad n \in \mathbb{N}$.
Dann existiert Ableitung: $S \overset{①}{\Rightarrow}{}^n \; v_1 \dots v_n S v_n \dots v_1 \overset{②}{\Rightarrow} v_1 \dots v_n 1 v_n \dots v_1$.
Damit: $w \in L(G_3)$.

$L(G_3) \subseteq L_3$
Sei $w \in L(G_3)$, d. h. es existiert Ableitung: $S \Rightarrow^* w$.
Zuerst muss Regel ① angewendet werden, sobald Regel ② angewendet wird endet die Ableitung.
Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Anwendungen von Regel ①:
$S \overset{①}{\Rightarrow}{}^n \; x_1 \dots x_n S x_n \dots x_1 \overset{②}{\Rightarrow} x_1 \dots x_n 1 x_n \dots x_1$. Mit: $x_i \in \Sigma_3, i = (1, \dots, n)$
Damit: $w \in L_3$.

(b) (2 Punkte)

Lösung:
$\Rightarrow u = z_1 \dots z_{m-1}, v = z_m \dots z_n, n, m \leq p, m \leq n$
$\Rightarrow w' = uv^0x = z_1 \dots z_{m-1} z_{n+1} \dots z_p 1 z^{-1}$, was aber ein Widerspruch zur Definition von L_3 ist, da $m \leq n$.

3. Aufgabe, Mengen [5 Punkte]

(a) [2 Punkte:]

i.
Beweis:

$$
\begin{array}{ll}
 & x\in((A\setminus B) \cup (A\cap B) \cup (B\setminus A)) \\
\Leftrightarrow_{\text{Def. } \cup} & (x\in(A\setminus B)) \;\vee\; (x\in(A\cap B)) \;\vee\; (x\in(B\setminus A)) \\
\Leftrightarrow_{\text{Def. } \setminus,\cap} & (x\in A \wedge x\notin B) \;\vee\; (x\in A \wedge x\in B) \;\vee\; (x\in B \wedge x\notin A) \\
\Leftrightarrow_{\text{Distr. } \wedge,\vee} & (x\in A \wedge (x\notin B \vee x\in B)) \;\vee\; (x\in B \wedge x\notin A) \\
\Leftrightarrow_{\text{Neutr. T}} & (x\in A) \;\vee\; (x\in B \wedge x\notin A) \\
\Leftrightarrow_{\text{Distr. } \vee,\wedge} & (x\in A \vee x\in B) \;\wedge\; (x\in A \vee x\notin A) \\
\Leftrightarrow_{\text{Neutr. T}} & (x\in A \vee x\in B) \\
\Leftrightarrow_{\text{Def. } \cup} & x\in(A\cup B)
\end{array}
$$

ii.
Widerlegung durch Gegenbeispiel:

Sei $A:= \emptyset$, $B:= \emptyset$

$$
\begin{array}{ll}
\Rightarrow & A\times B = \emptyset \\
\Rightarrow & P(AxB) = \{\emptyset\} \\
\Rightarrow & |P(A\times B)| = 1 \\
\text{aber} & A\cup B = \emptyset, \quad A\cap B = \emptyset \\
\Rightarrow & |A\cup B| = 0, \quad |A\cap B| = 0 \\
\Rightarrow & |A\cup B| + |A\cup B| = 0 \\
\Rightarrow & |P(A\times B)| = 1 \neq 0 = |A\cup B| + |A\cup B|
\end{array}
$$

(b) [2 Punkte:]

i.
Sei $A := \{1\}$, $B := \{2\}$
Wie zuvor bewiesen gilt die Gleichung aus Aufgabe 1.(a).i. für jede Belegung A,B.

ii.

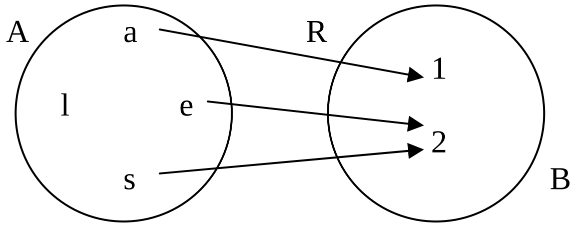
Sei $A := \{1\}$, $B := \{2\}$

$$
\begin{array}{ll}
\Rightarrow & A\times B = \{(1,2)\} \\
\Rightarrow & P(AxB) = \{\emptyset, \{(1,2)\}\} \\
\Rightarrow & |P(A\times B)| = 2 \\
\text{und} & A\cup B = \{1,2\}, \; A\cap B = \emptyset \\
\Rightarrow & |A\cup B| = 2, \; |A\cap B| = 0 \\
\Rightarrow & |A\cup B| + |A\cup B| = 2 \\
\Rightarrow & |P(A\times B)| = |A\cup B| + |A\cup B|
\end{array}
$$

4. Aufgabe, Relationen und Ordnungen [6 Punkte]

(a) [2 Punkte:]

- $R \subseteq A \times B$ — $\text{Typ}(R) = A \times B$
  $R = \{ (a,1), (e,2), (s,2) \}$ — $\text{Graph}(R) = \{ (a,1), (e,2), (s,2) \}$



- $R' \subseteq B \times A$ — $\text{Typ}(R') = B \times A$
  $R' = \{ (1,a), (1,e), (1,l), (1,s) \}$ — $\text{Graph}(R') = \{ (1,a), (1,e), (1,l), (1,s) \}$

$\Rightarrow (R' \circ R) \subseteq B \times A$
$(R' \circ R) = \{ (a,a), (a,e), (a,l), (a,s) \}$

(b) [1 Punkt:]

R3 ist eine partielle Ordnung.
R1 ist nicht reflexiv, denn $e \in A$, aber $(e,e) \notin R$
R2 ist nicht reflexiv, denn $e \in A$, aber $(e,e) \notin R$

(c) [1 Punkt:]

R1 lässt sich zu einer partiellen Ordnung erweitern:
$t(r(R1)) = R1 \cup \{ (e,e), (l,l) \}$

5. Aufgabe, Abbildungen und Repräsentantensystem [4 Punkte]

(a) [2 Punkte: 0,5 beide Aussagen stimmen ohne Beweis, ansonsten 1+1 (surj. + inj.)]

f ist surjektiv:
Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig
dann existiert $(n,0) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, so dass
$f((n,0)) = n$.

f ist nicht injektiv:
$f((0,0)) = 0 = f((0,1))$,
aber $(0,0) \neq (0,1)$, denn $0 \neq 1$

(b) [1 Punkt:]

$$\begin{aligned}
& f^{-1}(\{100,200\}) \\
= \ & \{ (n,m) \mid n,m \in \mathbb{N} \ \wedge \ f((n,m)) \in \{100,200\} \} \\
= \ & \{ (n,m) \mid n,m \in \mathbb{N} \ \wedge \ (f((n,m)) = 100 \ \vee \ f((n,m)) = 200) \} \\
= \ & \{ (n,m) \mid n,m \in \mathbb{N} \ \wedge \ (n = 100 \ \vee \ n = 200) \} \\
= \ & \{ (100,m) \mid m \in \mathbb{N} \} \ \cup \ \{ (200,m) \mid m \in \mathbb{N} \}
\end{aligned}$$

(c) [1 Punkt:]

S = { (n,0) | $n \in \mathbb{N}$ }

6. Aufgabe, Terme und Auswertung, Gleichungen [8 Punkte]

(a) [1 Punkt:]

erhoehung(prakti,minGehalt)

(b) [1 Punkt:]

vorgesetzter(vorgesetzter(vorgesetzter(w)))

(c) [2 Punkte:]

$$
\begin{aligned}
& eva_g(\ v\ ) \\
= \ & eva_g(\ erhoehung(vorgesetzter(w), x)\ ) \\
= \ & erhoehung_A(\ eva_m(\ vorgesetzter(w)\ ), eva_g(\ x\ )\ ) \\
= \ & erhoehung_A(vorgesetzter_A(\ eva_m(\ w\ )\ ), ass_{geld}(\ x\ )) \\
= \ & erhoehung_A(vorgesetzter_A(ass_{menschen}(\ w\ )\ ), 550) \\
= \ & erhoehung_A(vorgesetzter_A(m_3), 550) \\
= \ & erhoehung_A(m_4, 550) \\
= \ & 1000
\end{aligned}
$$

(d) [3 Punkte:]

i. Beweis:
sei ass: $X \to A$ beliebig:

$$
\begin{aligned}
& eva_g(\ t\ ) \\
= \ & eva_g(\ gehalt(vorgesetzter(vorgesetzter(prakti)))\ ) \\
= \ & gehalt_A(vorgesetzter_A(vorgesetzter_A(prakti_A))) \\
= \ & gehalt_A(m_2) \\
= \ & 600 \\
= \ & erhoehung_A(m_1, 550) \\
= \ & erhoehung_A(vorgesetzter_A(prakti_A), gehalt_A(vorgesetzter_A(prakti_A))) \\
= \ & eva_g(\ erhoehung(vorgesetzter(prakti), gehalt(vorgesetzter(prakti)))\ ) \\
= \ & eva_g(\ u\ )
\end{aligned}
$$

ii. Widerlegung durch Gegenbeispiel:
sei ass: $X \to A$ gegeben durch $ass_{menschen}(w) = m_3$, $ass_{geld}(x) = 550$

$$
\begin{aligned}
& eva_g(\ v\ ) \\
= \ & eva_g(\ erhoehung(vorgesetzer(w),x)\ ) \\
= \ & erhoehung_A(vorgesetzter_A(ass_{menschen}(w)), ass_{menschen}(x)) \\
= \ & erhoehung_A(m_4, 550) \\
= \ & 1000 \\
\neq \ & 550 \\
= \ & erhoehung_A(p,z) \qquad [z \in A_{geld}\ \ beliebig] \\
= \ & erhoehung_A(prakti_A, gehalt_A(vorgesetzter_A(vorgesetzter_A(ass_{menschen}(w))))) \\
= \ & eva_g(\ erhoehung(prakti, gehalt(vorgesetzter(vorgesetzter(w))))\ )
\end{aligned}
$$

(e) [1 Punkt:]

t3 = minGehalt

7. Aufgabe, Homomorphismen und Algebren [10 Punkte]

(a) [2 Punkte:]

i. h: $A \to B$
$h = (h_s)_{s \in S}$, mit Firma := (S,OP)
$h_{menschen}$: $A_{menschen} \to B_{menschen}$
$h_{menschen}(a) = p \qquad \forall a \in A_{menschen}$
h_{geld}: $A_{geld} \to B_{geld}$
$h_{geld}(a) = 320 \qquad \forall a \in A_{geld}$

ii. $\forall am \in A_{menschen} \ \forall ag \in A_{geld}$:
$h_{geld}(erhoehung_A(am,ag))$
$=_{Def.\ h\_geld} \ 320$
$=_{Def.\ erhoehung\_B} erhoehung_B(p, 320)$
$=_{Def.\ h\_menschen} erhoehung_B(h_{menschen}(am), h_{geld}(ag))$

(b) [2 Punkte:]

Seien $t, t_3 \in T_{Firma,geld}$, mit
t := gehalt(vorgesetzter(vorgesetzter(prakti)))
t_3 := minGehalt

$eval(B)_{geld}$(minGehalt) = 320 = $eval(B)_{geld}$(gehalt(vorgesetzter(vorgesetzter(prakti))))
$eval(A)_{geld}$(minGehalt)=320≠600=$eval(A)_{geld}$(gehalt(vorgesetzter(vorgesetzter(prakti))))

Annahme: es existiert ein Homomorphismus g: $B \to A$
Homomorphismen bewahren Grundterme (Satz 9.4.1) wie t und t_3, also muss gelten
$g_{geld}(320) = g_{geld}(eval(B)_{geld}(t)) = eval(A)_{geld}(t) = 600$
$g_{geld}(320) = g_{geld}(eval(B)_{geld}(t_3)) = eval(A)_{geld}(t_3) = 320$
Also ist g_{geld} nicht rechtseindeutig (und damit keine Abbildung)
Widerspruch zur Annahme, denn g ist kein Homomorphismus
$\Rightarrow$ es existiert kein Homomorphismus g: $B \to A$.

(c) [6 Punkte:]

i. Firma' = (S', OP'),
sorts: menschen
opns: prakti:$\to$ menschen

ii. C:
$C_{menschen} = \{0,1\}$
$prakti_C = 0 \quad \in C_{menschen}$

iii. D = B
iv. Widerlegung durch Widerspruchsbeweis:

Annahme: es existiert eine Unteralgebra A' von A mit einelementigen Trägermengen:

Da die Werte der Konstanten gleich bleiben müssen, müssen die Elemente der Trägermengen gerade die Werte der Konstanten aus A sein:
$A'_{menschen} = \{p\}$, $A'_{geld} = \{320\}$

Außerdem muss gelten $vorgesetzter_{A'} \subseteq vorgesetzter_A$, mit $(p,m_1) \in vorgesetzter_A$
Da m_1 kein Element von $A'_{menschen}$ ist, gilt $(p,m_1) \notin vorgesetzter_{A'}$.
$vorgesetzter_{A'}$ bildet also das Element $p \in A'_{menschen}$ nicht ab
$\Rightarrow$ $vorgesetzter_{A'}$ ist nicht linkstotal
$\Rightarrow$ $vorgesetzter_{A'}$ ist keine totale Abbildung
Widerspruch zur Annahme, denn A' ist keine Algebra
$\Rightarrow$ Es existiert keine Unteralgebra A' von A mit einelementigen Trägermengen.

8. Aufgabe, Spezifikation und Kongruenzrelation [7 Punkte]

(a) [3 Punkte:]

$eval(A)_{menschen}$ ist surjektiv:

Sei $a \in A_{menschen}$ beliebig:

1. Fall: $a = p$
dann existiert $prakti \in T_{Firma,menschen}$, mit
$eval(A)_{menschen}(\ prakti\ ) = prakti_A = p$

2. Fall: $a = m_i$, mit $i \in [1,5]_{\mathbb{N}}$
dann existiert $vorgesetzter^i(prakti) \in T_{Firma,menschen}$, mit
$eval(A)_{menschen}(\ vorgesetzter^i(prakti)\ ) = vorgesetzter_A{}^i(prakti_A) =_{i \le 5} m_i$

$eval(A)_{menschen}$ ist nicht injektiv:
$eval(A)_{menschen}(vorgesetzter^5(prakti)) = m_5 = vorgesetzter_A(m_5)$
$= vorgesetzter_A(eval(A)_{menschen}(vorgesetzter^5(prakti))) =$
$eval(A)_{menschen}(vorgesetzter^6(prakti))$,
aber: $vorgesetzter^5(prakti) \neq vorgesetzter^6(prakti)$

(b) [3 Punkte:]

$R_{geld} = \{(g,g') \mid g,g' \in A_{geld}\}$, $R_{menschen} = \{(m,m') \mid m,m' \in A_{menschen}\}$

Wegen der Vorgabe dass p und m_1 äquivalent sind und wegen der Operationsverträglichkeit von R mit $vorgesetzter_A$ müssen alle Menschen zu einer Äquivalenzklasse gehören. Deswegen und wegen der Operationsverträglichkeit von R mit $gehalt_A$ müssen auch alle Gehälter zu einer Äquivalenzklasse gehören.

Operationsverträglichkeit von R mit $vorgesetzter_A$ (wird abgekürzt mit va) :
Sei $(m,m') \in R_{menschen}$ mit $m,m' \in A_{menschen}$. Dann ist $va(m) = n$, $va(m') = n'$ mit $n,n' \in A_{menschen}$. Da $n,n' \in A_{menschen}$ folgt aus der Definition von $R_{menschen}$ dass auch $(n,n') \in R_{menschen}$.

(c) [1 Punkt:]

A ist keine *SPEC*-Algebra, denn e2 ist nicht gültig in A.