none

TheGI 2 im SS 2000: Klausur am 15. Juli 2000

Bei der Klausur sind 56 Punkte erreichbar, 24 im ersten und 32 im zweiten Teil. Wer 28 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Mit der Bearbeitung der Zusatzaufgaben (9 Punkte) können nicht erreichte Punkte bei den regulären Klausuraufgaben ausgeglichen werden. Da diese Aufgaben vom Schwierigkeitsgrad etwas höher sind, bearbeitet sie erst zum Schluß.

Verschafft Euch zuerst einen Überblick über alle Aufgaben und fangt dann mit der Bearbeitung derjenigen Aufgaben an, die Euch am wenigsten aufwendig erscheinen.

Die häufig geforderten Begründungen meinen keine Beweise, sondern lassen sich kurz in einem Satz abhandeln.

Beginnt bitte jede Aufgabe auf einer neuen Seite. (Wir haben Blätter vorrätig, falls Euer Vorrat verbraucht ist.) Schreibt bitte auf jedes von Euch abgegebene Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer!

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Z	Σ
Punkte	5	4	7	8	5	13	14	9	56 (+9)

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Z	Σ	Note
Punkte									

Teil 1: Mengen, Relationen, Abbildungen, Ordnungen, Äquivalenzrelationen

Aufgabe 1, Mengen (5 Punkte)

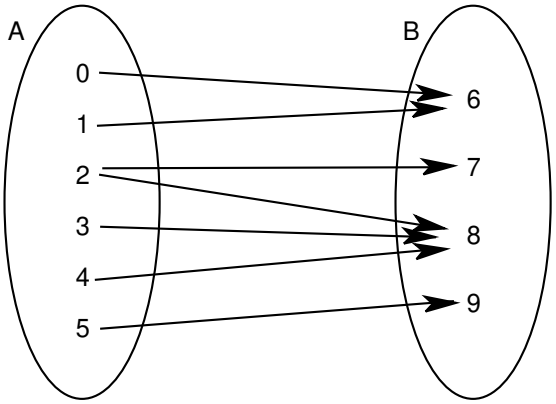
1. **(2 Punkte)**
   Gebt folgende Mengen elementweise an:
   (a) $\mathcal{P}(\{0,1\}) \cup \{x, y, z\}$
   (b) $(\{1\} \times \{!, ?\}) \setminus (\{2\} \times \{!, @\})$

2. **(3 Punkte)** Beweist oder widerlegt die folgenden Aussagen:
   (a) $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D)$
   (b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

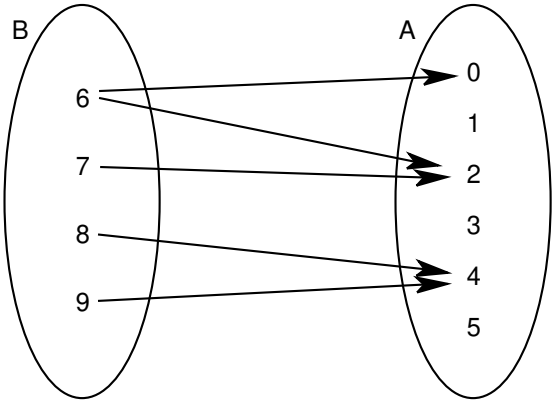
Aufgabe 2, Relationen (4 Punkte)

Seien $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{6, 7, 8, 9\}$ zwei Mengen und seien die Relationen R_1 vom Typ $A \times B$ und R_2 vom Typ $B \times A$ durch die folgenden Graphen gegeben:

R_1:



R_2:



1. **(1 Punkt)** Ist $R_2 \circ R_1$ linkstotal? Begründung.

2. **(1 Punkt)** Ist $R_2 \circ R_1$ rechtseindeutig? Begründung.

3. Berechnet die folgenden Relationen und gebt die Graphen der Relationen vollständig in Mengenschreibweise oder visualisiert an:

   (a) **(1 Punkt)** $R_3 = R_1 \circ R_2$

   (b) **(1 Punkt)** $R_4 = R_1^{-1}$

Aufgabe 3, Abbildungen (7 Punkte)

1. **(3 Punkte)** Welche der Eigenschaften injektiv und surjektiv treffen auf die folgende Abbildung zu? Beweist beide Aussagen!

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{2} & : \text{falls } x \text{ gerade} \\ -\frac{x-1}{2} & : \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

2. **(2 Punkte)** Sei $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{a, b, c, d\}$ und $Q = \{\{0, 1, 2\}, \{3\}, \{4, 5, 6\}\}$.
   (a) **(1 Punkt)** Gebt eine Abbildung $f : A \to B$ an, für die $A/_{Ker(f)} = Q$ gilt.
   (b) **(1 Punkt)** Gebt bezüglich $Ker(f)$ ein Repräsentantensystem R von Q an.

3. **(2 Punkte)** Sei $f : A \to B$ eine beliebige Abbildung und $nat \subseteq A \times A/_{Ker(f)}$ die Relation $nat = \{(x, [y]) | x \in [y]\}$. Beweist unter Ausnutzung der Eigenschaften von Äquivalenzklassen und Quotienten, daß nat eine totale Abbildung ist.

Aufgabe 4, Ordnungen und Äquivalenzrelationen (8 Punkte)

Betrachtet die folgenden als Diagramme dargestellten Relationen vom Typ $M \times M$ mit $M = \{a, b, c, d\}$:

R_1:

R_2:

R_3:

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(1 Punkt)** Welche der Relationen sind keine partiellen Ordnungen? Begründung!
2. **(1 Punkt)** Welche Relationen lassen sich durch Hinzufügen weiterer Paare **nicht** zu einer partiellen Ordnung erweitern?
3. **(2 Punkte)** Berechnet die Abschlüsse $A_1 = t(s(R_1))$ und $A_2 = s(t(R_2))$ und gebt die Graphen visualisiert an.

$A_1 = t(s(R_1))$:

$A_2 = s(t(R_2))$:

4. **(2 Punkte)** Eine der beiden Relationen A_1 und A_2 ist eine Äquivalenzrelation.
   (a) Welche?
   (b) Gebt die Äquivalenzklassen des Quotienten von M bezüglich dieser Äquivalenzrelation elementweise an.

5. **(1 Punkt)** Eine der Relationen R_i mit $i \in \{1, 2, 3\}$ ist eine partielle Ordnung. Erweitert diese Relation zu einer totalen Ordnung R_t. Gebt den Graphen von R_t visualisiert an.

R_t: a b c d

6. **(1 Punkt)** Ordnet die fünf Wörter acd, add, λ, bc und $bdcc$ aus A^* nach der Standardordnung über R_t.

Teil 2: Signatur,Homomorphismen ,Algebren, Terme, Spezifikation,

Aufgabe 5, Terme und Termalgebra (5 Punkte)

Gegeben sei die folgende Signatur:

$$
\begin{array}{lll}
\Sigma = & \textbf{sorts} & \text{q, r} \\
& \textbf{opns} & \text{z:} \quad \rightarrow \text{r} \\
& & \text{s:} \quad \text{r} \rightarrow \text{r} \\
& & \text{k:} \quad \text{r} \rightarrow \text{q} \\
& & \text{e:} \quad \text{q} \rightarrow \text{q}
\end{array}
$$

1. **(1 Punkt)** Gebt zu beiden Sortensymbolen je einen Grundterm an, der mindestens 4 Operationssymbole enthält.
2. **(3 Punkt)** Stellt die Grundtermalgebra T_Σ auf. (Die rekursive Definition der Trägermengen ist erlaubt (und empfehlenswert). Denkt daran, bei den Abbildungen die Funktionalitäten anzugeben.)
3. **(1 Punkt)** Wieviele Elemente müssen die Trägermengen C_r und C_q einer Σ-Algebra C mindestens enthalten?

Aufgabe 6, Homomorphismen (13 Punkte)

Desweiteren seien zwei Σ-Algebren A und B wie folgt definiert:

Σ	A	B
r q	$A_r = \mathbb{N}$ $A_q = \mathbb{R}$	$B_r = \mathbb{Z}$ $B_q = \mathbb{N}$
$z :\rightarrow r$	$z_A = 0$	$z_B = 42$
$s : r \rightarrow r$	$s_A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N};$ $x \mapsto x + 1$	$s_B : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z};$ $x \mapsto \begin{cases} x+1 & : \text{ falls } x \text{ gerade} \\ x-1 & : \text{ sonst} \end{cases}$
$k : r \rightarrow q$	$k_A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R};$ $x \mapsto 0$	$k_B : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N};$ $x \mapsto 6$
$e : q \rightarrow q$	$e_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$ $x \mapsto \begin{cases} 0 & : \text{ falls } x = 0 \\ 1 & : \text{ sonst} \end{cases}$	$e_B : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N};$ $x \mapsto \begin{cases} 6 & : \text{ falls } x \text{ gerade} \\ 7 & : \text{ sonst} \end{cases}$

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(6 Punkte)** Gesucht wird ein Σ-Homomorphismus $h : A \rightarrow B$:
   (a) Stellt die Homomorphiebedingungen auf.
   (b) Gebt einen Homomorphismus $h : A \rightarrow B$ an.
   (c) Beweist, daß h die Homomorphiebedingungen für die Operationssymbole k und e erfüllt.
2. **(1 Punkt)** Gebt die Trägermengen einer echten Σ-Unteralgebra B' von B an.
3. **(4 Punkte)** Beweist, daß es keinen Σ-Homomorphismus $g : B \rightarrow A$ gibt.
4. **(1 Punkt)** Kann man aus der Signatur Σ durch Entfernen eines einzelnen Operationssymbols eine Untersignatur Σ_1 erzeugen, so daß es nun vom Σ_1-Redukt der Algebra B in das Σ_1-Redukt der Algebra A einen Homomorphismus gibt?
   Falls ja, welches? (Die Angabe des Homomorphismus' ist NICHT notwendig!)
5. **(1 Punkt)** Ist $T_\Sigma/_{Ker(eval(A))}$ isomorph zu A? Begründung!

Aufgabe 7, Terme, Gleichungen, Spezifikation (14 Punkte)

Gegeben sei die folgende Signatur Σ:

$$
\begin{array}{lll}
\Sigma = & \textbf{sorts} & \text{data, list} \\
& \textbf{opns} & \text{z:} \quad \to \text{data} \\
& & \text{succ:} \quad \text{data} \to \text{data} \\
& & \text{add:} \quad \text{data} \quad \text{data} \to \text{data} \\
& & \text{e:} \quad \to \text{list} \\
& & \text{ladd:} \quad \text{data list} \to \text{list} \\
& & \text{con:} \quad \text{list list} \to \text{list} \\
& & \text{sum:} \quad \text{list} \to \text{data}
\end{array}
$$

sowie folgende Σ-Algebra A:

Σ	A
$data$	$A_{data} = \mathbb{N}$
$list$	$A_{list} = \mathbb{N}^*$
$z :\to data$	$z_A = 0$
$succ : data \to data$	$succ_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $x \mapsto x + 1$
$add : data\, data \to data$	$add_A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(x, y) \mapsto x + y$
$e :\to list$	$e_A = \lambda$
$ladd : data\, list \to list$	$ladd_A : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ $(x, w) \mapsto xw$
$con : list\, list \to list$	$con_A : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ $(u, w) \mapsto uw$
$sum : list \to data$	$sum_A : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ $w \mapsto \begin{cases} 0 & : \text{ falls } w = \lambda \\ \sum_{i=1}^{n} a_i & : \text{ falls } w = a_1 ... a_n \text{ mit } a_1, ..., a_n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(6 Punkte)** Gegeben sei das Variablensystem X mit
   $X_d = \{x, y\}$ und
   $X_l = \{w, u\}$.

   (a) **(2 Punkte)**Gebt eine Variablenbelegung $ass : X \to A$ an (Denkt an die Funktionalitäten!) und wertet den Term $sum(ladd(x, ladd(y, u)))$ schrittweise gemäß der Definition von $xeval(ass)$ aus.
   Hinweise:

   i. Ihr könnt in dieser und den weiteren Aufgaben die folgenden abkürzenden Schreibweisen verwenden:
   $$eva_l \quad =_{def} \quad xeval(ass)_{list}$$
   $$eva_d \quad =_{def} \quad xeval(ass)_{data}$$

   ii. Zur besseren Lesbarkeit könnt Ihr die Buchstaben eines Wortes durch „;“ trennen, d.h. das Wort aus den Buchstaben „42“ und „13“ sollte als „42; 13“ geschrieben werden.

   (b) **(4 Punkte)** Beweist oder widerlegt die Gültigkeit der folgenden Gleichungen in der Σ-Algebra A:
   $$\text{(e1)} \quad sum(ladd(x, ladd(y, e))) = sum(ladd(y, ladd(x, e)))$$
   $$\text{(e2)} \quad ladd(x, ladd(y, e)) = ladd(y, ladd(x, e))$$

2. **(2 Punkte)** Gebt 4 Elemente der Äquivalenzklasse $[ladd(z, ladd(succ(z), e))]_{Ker(eval(A))}$ an.

3. **(5 Punkte)** Ergänzt die rechten Seiten der folgenden Σ-Gleichungen der Gleichungsmenge $E = \{e1, e2, ..., e6\}$, so daß $T_\Sigma/_{\sim E}$ isomorph zu A ist.(Ohne Beweis!)

   (e1) $add(z, x) =$

   (e2) $add(succ(y), x) =$

   (e3) $con(e, w) =$

   (e4) $con(ladd(x, u), w) =$

   (e5) $sum(e) =$

   (e6) $sum(ladd(x, u)) =$

4. **(1 Punkt)** Für welche Untersignatur Σ' von Σ stimmt die strukturelle Induktion mit der vollständigen Induktion überein?

Zusatzaufgaben, Spezifikation (9 Punkte)

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf die Signatur Σ und die Algebra A aus der vorangegangenen Aufgabe 6.

1. **(4 Punkte)** Wir erweitern die Signatur Σ und die Algebra A um die folgenden Operationssymbole bzw. Abbildungen:

   radd: $ld \to l$ $\quad radd_A : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, $(w, x) \mapsto wx$

   inv: $l \to l$ $\quad inv_A : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$,
   $$w \mapsto \begin{cases} \lambda & : \text{ falls } w = \lambda \\ a_n ... a_1 & : \text{ falls } w = a_1 ... a_n \text{ mit } a_1, ..., a_n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   zu einer Signatur Σ'' bzw. einer Σ''-Algebra A'.

   Ergänzt E zu einer Gleichungsmenge E', sodaß $T_{\Sigma''}|_{\sim E'}$ isomorph zur Algebra A' ist.

2. **(5 Punkte)**

   (a) **(1 Punkt)** Gebt eine Familie R von Repräsentantensystemen zu den Trägermengen von $T_{\Sigma''}/_{\sim E'}$ an.

   (b) **(4 Punkte)** Beweist:
   $\forall t \in T_{\Sigma''}$: Es gibt ein $r \in R$ mit $: r \sim^E t$.