TheGI 2 im SS 2000: Nachklausur vom 22. September 2000

Bei der Klausur sind 53 Punkte erreichbar, 20 im ersten und 33 im zweiten Teil. Wer 26 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Mit der Bearbeitung der Zusatzaufgaben (8 Punkte) können nicht erreichte Punkte bei den regulären Klausuraufgaben ausgeglichen werden. Da diese Aufgaben vom Schwierigkeitsgrad etwas höher sind, bearbeitet sie erst zum Schluß.

Verschafft Euch zuerst einen Überblick über alle Aufgaben und fangt dann mit der Bearbeitung derjenigen Aufgaben an, die Euch am wenigsten aufwendig erscheinen.

Die häufig geforderten Begründungen meinen keine Beweise, sondern lassen sich kurz in einem Satz abhandeln.

Beginnt bitte jede Aufgabe auf einer neuen Seite. (Wir haben Blätter vorrätig, falls Euer Vorrat verbraucht ist.) Schreibt bitte auf jedes von Euch abgegebene Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer!

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Z	Σ
Punkte	5	2	5	8	21	12	8	53 (+8)

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Z	Σ	Note
Punkte									

Teil 1: Mengen, Relationen, Abbildungen, Ordnungen, Äquivalenzrelationen

Aufgabe 1, Mengen (5 Punkte)

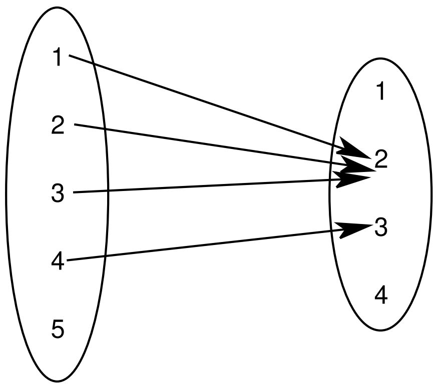
1. **(2 Punkte)**
   Gebt folgende Mengen elementweise an:
   (a) $\mathcal{P}(\{1\})$
   (b) $(\{\{1\},\{2\}\} \times \{!,?\})$

2. **(3 Punkte)** Beweist oder widerlegt die folgenden Aussagen:
   (a) $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$
   (b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$

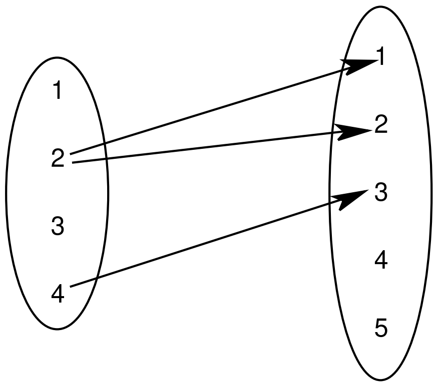
Aufgabe 2, Relationen (2 Punkte)

Seien $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$ zwei Mengen und seien die Relationen R_1 vom Typ $A \times B$ und R_2 vom Typ $B \times A$ durch die folgenden Graphen gegeben:

R_1:



R_2:



Berechnet die folgenden Relationen und gebt die Graphen der Relationen vollständig in Mengenschreibweise oder visualisiert an:

(a) **(1 Punkt)** $R_3 = R_2 \circ R_1$

(b) **(1 Punkt)** $R_4 = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$

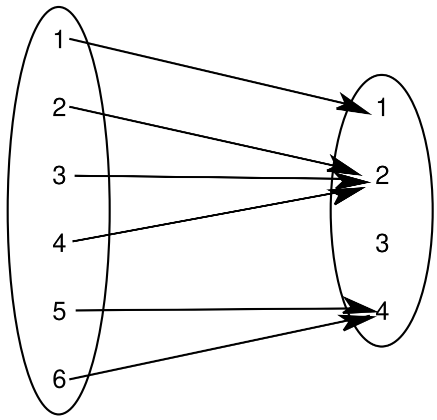
Aufgabe 3, Abbildungen (2 Punkte)

1. **(3 Punkte)** Welche der Eigenschaften injektiv und surjektiv treffen auf die folgende Abbildung zu? Beweist beide Aussagen!

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : x \mapsto \begin{cases} (-\frac{x}{2}) - 1 & : \text{falls } x \text{ gerade} \\ \\ \frac{x+1}{2} & : \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

2. **(2 Punkte)** Sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ und $f : A \to B$ die folgende Abbildung

f:



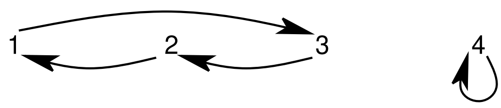
   (a) **(1 Punkt)** Gebt die Äquivalenzklassen des Quotienten $A/_{Ker(f)}$ elementweise an.

   (b) **(1 Punkt)** Gebt bezüglich $Ker(f)$ ein Repräsentantensystem R von $A/_{Ker(f)}$ an.

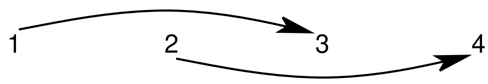
Aufgabe 4, Ordnungen und Äquivalenzrelationen (8 Punkte)

Betrachtet die folgenden als Diagramme dargestellten Relationen vom Typ $M \times M$ mit $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

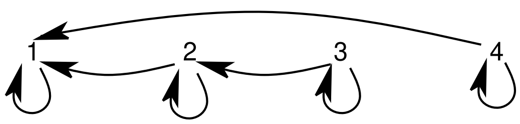
R_1:



R_2:



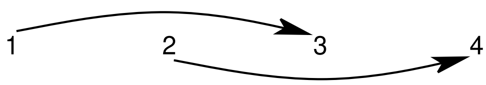
R_3:



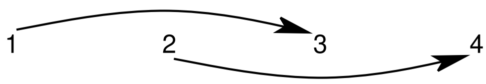
Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(1 Punkt)** Welche der Relationen sind keine partiellen Ordnungen? Begründung!
2. **(1 Punkt)** Welche Relationen lassen sich durch Hinzufügen weiterer Paare **nicht** zu einer partiellen Ordnung erweitern?
3. **(2 Punkte)** Berechnet die Abschlüsse $A_1 = s(t(R_2))$ und $A_2 = t(s(R_2))$ und gebt die Graphen visualisiert an.

$A_1 = s(t(R_2))$:



$A_2 = t(s(R_2))$:



4. **(2 Punkte)** Eine der beiden Relationen A_1 und A_2 ist eine Äquivalenzrelation.

   (a) Welche?

   (b) Gebt den Quotienten von M bezüglich dieser Äquivalenzrelation an.

5. **(1 Punkt)** Eine der Relationen R_i mit $i \in \{1, 2, 3\}$ ist transitiv. Erweitert diese Relation zu einer totalen Ordnung R_t. Gebt den Graphen von R_t visualisiert an.

   R_t: 1 2 3 4

6. **(1 Punkt)** Ordnet die fünf Wörter $124, 12, \lambda, 122$ und 142 aus A^* nach der lexikographischer Ordnung über R_t.

Teil 2: Signatur,Homomorphismen ,Algebren, Terme, Spezifikation,

Aufgabe 5, Terme, Termalgebra, Gleichungen und Spezifikation (21 Punkte)

Gegeben sei die folgende Signatur Σ:

$\Sigma =$	**sorts**	bool, list	
	opns	t:	$\to$ bool
		not:	bool $\to$ bool
		or:	bool bool $\to$ bool
		e:	$\to$ list
		ladd:	bool list $\to$ list
		listor:	list $\to$ bool

sowie folgende Σ-Algebra A:

Σ	A
bool	$A_{bool} = \{T, F\}$
list	$A_{list} = \{T, F\}^*$
$t :\to bool$	$t_A = T$
$not : bool \to bool$	$not_A : \{T, F\} \to \{T, F\}$ $x \mapsto \begin{cases} T & : \text{falls } x = F \\ F & : \text{falls } x = T \end{cases}$
$or : bool\, bool \to bool$	$or_A : \{T, F\} \times \{T, F\} \to \{T, F\}$ $(x, y) \mapsto \begin{cases} F & : \text{falls } x = y = F \\ T & : \text{falls } sonst \end{cases}$
$e :\to list$	$e_A = \lambda$
$ladd : bool\, list \to list$	$ladd_A : \{T, F\} \times \{T, F\}^* \to \{T, F\}^*$ $(x, w) \mapsto xw$
$listor : list \to bool$	$listor_A : \{T, F\}^* \to \{T, F\}$ $w \mapsto \begin{cases} F & : \text{falls } w = a_1 ... a_n \text{ mit } a_1 = ... = a_n = F \\ T & : \text{sonst (insbesondere falls } w = \lambda) \end{cases}$

Nachfolgend die Aufgaben:

Gegeben sei das Variablensystem X mit

$X_{bool} = \{x, y\}$ und
$X_{list} = \{w, u\}$.

1. **(1 Punkt)** Gebt zu beiden Sortensymbolen je einen Term an, der mindestens 4 Operationssymbole und die Variablen x und w enthält.

2. **(2 Punkte)**Gebt eine Variablenbelegung $ass : X \to A$ an (Denkt an die Funktionalitäten!) und wertet einen der Terme schrittweise gemäß der Definition von $xeval(ass)$ aus.
   Hinweise: Ihr könnt in dieser und den weiteren Aufgaben die folgenden abkürzenden Schreibweisen verwenden:

$$\begin{aligned} eva_l &=_{def} xeval(ass)_{list} \\ eva_b &=_{def} xeval(ass)_{bool} \end{aligned}$$

3. **(4 Punkte)** Beweist oder widerlegt die Gültigkeit der folgenden Gleichungen in der Σ-Algebra A:
   (e1) $listor(ladd(x, w)) = not(x)$
   (e2) $listor(ladd(x, ladd(t, e))) = t$

4. **(1 Punkt)** Stellt Trägermengen der Grundtermalgebra T_Σ auf. (Die rekursive Definition der Trägermengen ist erlaubt (und empfehlenswert).)

5. **(2 Punkte)**
   (a) Gebt die Trägermengen der Quotientenalgebra $B =_{def} T_\Sigma|_{ker(eval(A))}$ an.
   (b) Gebt die Konstante e_B an.
   (c) Gebt die Abbildung $listor_B$ an.

6. (a) **(1 Punkt)** Gebt 3 Terme der Äquivalenzklasse $[t]_{Ker(eval(A))}$ an.
   (a) **(1 Punkt)** Gebt einen weiteren Term der Äquivalenzklasse $[t]_{Ker(eval(A))}$ an, der das Operationssymbol $ladd$ enthält.

7. **(5 Punkte)** Ergänzt die rechten Seiten der folgenden Σ-Gleichungen der Gleichungsmenge $E = \{e1, e2, ..., e6\}$, so daß $T_\Sigma/_{\sim E}$ isomorph zu A ist.(Ohne Beweis!)

   (e1) $not(not(x)) =$

   (e2) $or(x, t) =$

   (e3) $or(t, y) =$

   (e4) $or(not(t), not(t)) =$

   (e5) $listor(e) =$

   (e6) $listor(ladd(t, u)) =$

   (e7) $listor(ladd(not(t), u)) =$

8. Wir erweitern die Signatur Σ und die Algebra A um das folgende Operationssymbol bzw. die folgende Abbildung:

Σ'	A'
$first : list \to bool$	$first_A : \{T, F\}^* \to \{T, F\}$ $w \mapsto \begin{cases} a_1 & : \text{ falls } w = a_1...a_n \text{ mit } a_1, ..., a_n \in \{T, F\} \\ F & : \text{ sonst} \end{cases}$

   zu einer Signatur Σ' bzw. einer Σ'-Algebra A''.

   (a) **(3 Punkte)** Ergänzt E zu einer Gleichungsmenge E', sodaß $T_{\Sigma'}|_{\sim E'}$ isomorph zur Algebra A'' ist.

   (b) **(1 Punkt)** Was stellt A'' bezüglich A dar?

Aufgabe 6, Homomorphismen (12 Punkte)

Gegeben sei die folgende Signatur Σ, sowie die beiden Σ-Algebran A und B:

Σ	A	B
nat $bool$	$A_{nat} = \mathbb{N}$ $A_{bool} = \mathbb{N}$	$B_{nat} = \mathbb{Z}$ $B_{bool} = \{T, F\}$
$zero :\to nat$	$zero_A = 0$	$zero_B = 0$
$succ : nat \to nat$	$succ_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N};$ $x \mapsto x + 1$	$succ_B : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z};$ $x \mapsto \begin{cases} x+1 & : \text{falls } x \text{ gerade} \\ x-1 & : \text{sonst} \end{cases}$
$false :\to bool$	$false_A = 0$	$false_B = F$
$or : boolbool \to bool$	$or_A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(x, y) \mapsto x + y$	$or_B : \{T, F\} \times \{T, F\} \to \{T, F\};$ $(x, y) \mapsto \begin{cases} F & : \text{falls } x = y = F \\ T & : \text{sonst} \end{cases}$
$even : nat \to bool$	$even_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $x \mapsto \begin{cases} 0 & : \text{falls } x \text{ gerade} \\ 1 & : \text{sonst} \end{cases}$	$even_B : \mathbb{Z} \to \{T, F\};$ $x \mapsto \begin{cases} F & : \text{falls } x \text{ gerade} \\ T & : \text{sonst} \end{cases}$

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(6 Punkte)** Gesucht wird ein Σ-Homomorphismus $h : A \to B$:
   (a) Stellt die Homomorphiebedingungen auf.
   (b) Gebt einen Homomorphismus $h : A \to B$ an.
   (c) Beweist, daß h die Homomorphiebedingungen für die Operationssymbole $zero$ und $even$ erfüllt.
2. **(4 Punkte)** Beweist, daß es keinen Σ-Homomorphismus $g : B \to A$ gibt.
3. **(1 Punkt)** Kann man aus der Signatur Σ durch Entfernen eines einzelnen Operationssymbols eine Untersignatur Σ_1 erzeugen, so daß es nun vom Σ_1-Redukt der Algebra B in das Σ_1-Redukt der Algebra A einen Homomorphismus gibt?
   Falls ja, welches? (Die Angabe des Homomorphismus' ist NICHT notwendig!)
4. **(1 Punkt)** Ist $T_\Sigma/_{Ker(eval(A))}$ isomorph zu A? Begründung!

Zusatzaufgaben, Spezifikation (8 Punkte)

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf die Signatur Σ und die Algebra A aus der Aufgabe 5.

1. **(4 Punkte)** Wir erweitern die Signatur Σ und die Algebra A um das Sortensymbol *nat* bzw. die Trägermenge $A_{nat} = \mathbb{N}$ und die folgenden Operationssymbole bzw. Abbildungen:

Σ''	A''
$bool$	$A_{bool} = \{T, F\}$
$list$	$A_{list} = \{T, F\}^*$
nat	$A_{nat} = \mathbb{N}$
$t :\to bool$	$t_A = T$
$not : bool \to bool$	$not_A : \{T, F\} \to \{T, F\}$ $x \mapsto \begin{cases} T & : \text{ falls } x = F \\ F & : \text{ falls } x = T \end{cases}$
$or : bool\, bool \to bool$	$or_A : \{T, F\} \times \{T, F\} \to \{T, F\}$ $(x, y) \mapsto \begin{cases} F & : \text{ falls } x = y = F \\ T & : \text{ falls } sonst \end{cases}$
$e :\to list$	$e_A = \lambda$
$ladd : bool\, list \to list$	$ladd_A : \{T, F\} \times \{T, F\}^* \to \{T, F\}$ $(x, w) \mapsto xw$
$listor : list \to bool$	$listor_A : \{T, F\}^* \to \{T, F\}$ $w \mapsto \begin{cases} F & : \text{ falls } w = a_1 ... a_n \text{ mit } a_1 = ... = a_n = F \\ T & : \text{ sonst (insbesondere falls } w = \lambda) \end{cases}$
$z :\to nat$	$z_A = 0$
$succ : nat \to nat$	$succ_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $x \mapsto x + 1$
$tinl : list \to nat$	$tinl_A : \{T, F\}^* \to \mathbb{N}$ $x \mapsto \#_T(x)$

zu einer Signatur Σ'' bzw. einer Σ''-Algebra A''[1].

Ergänzt E' zu einer Gleichungsmenge E'', sodaß $T_{\Sigma''}|_{\sim E''}$ isomorph zur Algebra A'' ist.

[1] $\#_T(x)$ bezeichne die Anzahl des Buchstabens T im Wort x.

2. Erweitert die Algebra A'' um eine vollständige Fehlerbehandlung.

   (a) **(2 Punkte)** Ergänzt hierzu die Signatur um je Sorte ein Konstantensymbol f_b, f_l bzw. f_n zu einer Signatur Σ_F. Ergänzt die Trägermengen der Algebra A'' um die entsprechenden Fehlerkonstanten F_b, F_l bzw. F_n zu einer Algebra A_F und passt die Abbildungen der Algebra sinnvoll an.

   (b) **(2 Punkte)** Ergänzt E' zu einer Gleichungsmenge E', sodaß $T_{\Sigma''}|_{\sim E'}$ isomorph zur Algebra A'' ist.