TheGI 2 im SS 2001: Klausur am 17. Juli 2001

Bei der Klausur sind 54 Punkte erreichbar, 18 im ersten und 36 im zweiten Teil. Wer 27 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Mit der Bearbeitung der Zusatzaufgaben (6 Punkte) können nicht erreichte Punkte bei den regulären Klausuraufgaben ausgeglichen werden.

Verschafft Euch zuerst einen Überblick über alle Aufgaben und fangt dann mit der Bearbeitung derjenigen Aufgaben an, die Euch am wenigsten aufwendig erscheinen.

Die häufig geforderten Begründungen meinen keine Beweise, sondern lassen sich kurz in einem Satz abhandeln.

Beginnt bitte jede Aufgabe auf einer neuen Seite. (Wir haben Blätter vorrätig, falls Euer Vorrat verbraucht ist.) Schreibt bitte auf jedes von Euch abgegebene Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer!

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Z	Σ
Punkte	4	3	5	6	6	13	17	6	54 (+6)

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Z	Σ	Note
Punkte										

Teil 1: Mengen, Relationen, Abbildungen, Ordnungen, Äquivalenzrelationen

Aufgabe 1, Mengen (4 Punkte)

1. **(2 Punkte)**
   Gebt folgende Mengen elementweise an:
   (a) $\mathcal{P}(\{I, II\}) \cup (\{a, b, c\} \setminus \{a, I\})$
   (b) $(\{a, b\} \times \{1, 2, 3\}) \cap (\{a\} \times \{3, 4\})$

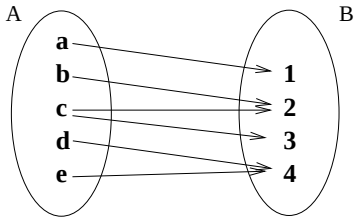
2. **(2 Punkte)** Beweist die folgenden Aussage:

   $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

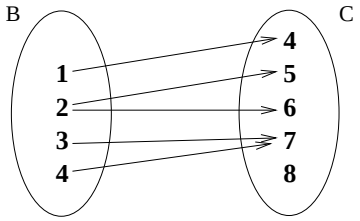
Aufgabe 2, Relationen (3 Punkte)

Seien $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ und $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ drei Mengen und seien die Relationen R_1 vom Typ $A \times B$ und R_2 vom Typ $B \times C$ durch die folgenden Graphen gegeben:

R_1 :



R_2 :



1. **(1 Punkt)** Ist $R_2 \circ R_1$ linkstotal? Begründung.

2. **(1 Punkt)** Ist $R_2 \circ R_1$ linkseindeutig? Begründung.

3. **(1 Punkt)** Berechnet die folgende Relation und gebt den Graphen der Relation vollständig in Mengenschreibweise oder visualisiert an: $R_3 = R_1^{-1} \circ R_1$

Aufgabe 3, Abbildungen (5 Punkte)

1. **(3 Punkte)** Welche der Eigenschaften injektiv und surjektiv treffen auf die folgende Abbildung zu? Beweist beide Aussagen!

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x + 1$$

2. **(2 Punkte)** Seien zwei Mengen $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{-1, 0, 1\}$ gegeben.

   (a) **(1 Punkt)** Gebt eine Abbildung $f : A \to B$ an, für die gilt:

   $$A/_{Ker(f)} = \{\{0, 2, 4\}, \{1, 3\}, \{5\}\}$$

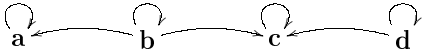
   (b) **(1 Punkt)** Gebt bezüglich $Ker(f)$ ein Repräsentantensystem R von $A/_{Ker(f)}$ an.

Aufgabe 4, Ordnungen und Äquivalenzrelationen (6 Punkte)

Betrachtet die folgenden als Diagramme dargestellten Relationen vom Typ $M \times M$ mit $M = \{a, b, c, d\}$:

R_1:

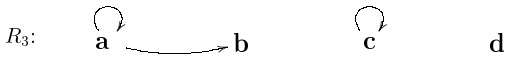
R_2:



Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(2 Punkt)** Welche Relation ist keine partielle Ordnung? Begründung!
2. **(1 Punkt)** Eine der Relationen R_i mit $i \in \{1, 2\}$ ist eine partielle Ordnung. Erweitert diese Relation durch Hinzufügen weiterer Paare zu einer totalen Ordnung R_t. Gebt den Graphen von R_t visualisiert an.
3. **(1 Punkt)** Ordnet die fünf Wörter acd, abb, λ, cd und $cbcb$ aus M^* nach der Standardordnung über R_t.
4. **(1 Punkt)** Gegeben sei die folgende Relation R_3 vom Typ $M \times M$. Berechnet den Abschluß $A = t(s(r(R_3)))$, d.h. erweitert die Relation durch Hinzufügen weiterer Paare zu einer Äquivalenzrelation und gebt den Graphen visualisiert an.

R_3:



5. **(1 Punkt)** Gebt die Äquivalenzklassen des Quotienten von M bezüglich dieser Äquivalenzrelation elementweise an.

Teil 2: Signatur, Terme, Algebren, Homomorphismen, Termauswertung, Spezifikation

Aufgabe 5, Terme und Termalgebra (6 Punkte)

Gegeben sei die folgende Signatur eines einfachen Line-Editors, die das Einfügen eines Buchstabens an der Position des Cursors und das Löschen eines Buchstabens an der Position des Cursors realisiert:

$\Sigma =$	**sorts**	data, string, line	
	opns	d1:	$\rightarrow$ data
		d2:	$\rightarrow$ data
		empty:	$\rightarrow$ string
		make-s:	data $\rightarrow$ string
		conc:	string string $\rightarrow$ string
		new-line:	$\rightarrow$ line
		make-l:	string string $\rightarrow$ line
		insert:	line data $\rightarrow$ line
		delete:	line $\rightarrow$ line

1. **(2 Punkte)** Gebt zu den Sortensymbolen *string* und *line* je einen Grundterm an, der mindestens 4 Operationssymbole enthält.
2. **(3 Punkte)** Gebt die Trägermenge $T_{\Sigma,line}$ der Grundtermalgebra T_Σ an und definiert die Abbildungen $new{-}line_{T_\Sigma}$ und $make{-}l_{T_\Sigma}$ (Denkt an die Funktionalitäten). Dabei können die Trägermengen $T_{\Sigma,data}$ und $T_{\Sigma,string}$ als gegeben vorausgesetzt werden.
3. **(1 Punkt)** Wieviele Elemente müssen die Trägermengen C_{data}, C_{string} bzw. C_{line} einer Σ-Algebra C mindestens enthalten? Begründung.

Aufgabe 6, Homomorphismen (13 Punkte)

Desweiteren seien zwei Σ-Algebren A und B wie folgt definiert:

Σ	A	B
$data$ $string$ $line$	$A_{data} = \{a, b\}$ $A_{string} = \{a, b\}^*$ $A_{line} = \{w \triangleright \mid w \in \{a, b\}^*\}$	$B_{data} = \mathbb{N}$ $B_{string} = \mathbb{Z}$ $B_{line} = \mathbb{Q}$
$d1 :\rightarrow data$	$d1_A = a$	$d1_B = 1$
$d2 :\rightarrow data$	$d2_A = b$	$d2_B = 1$
$empty :\rightarrow string$	$empty_A = \lambda$	$empty_B = 0$
$make - s : data \rightarrow string$	$make - s_A : A_{data} \rightarrow A_{string}$ $d \mapsto d$	$make - s_B : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ $x \mapsto 1$
$conc : string\ string \rightarrow string$	$conc_A : A_{string} \times A_{string} \rightarrow A_{string}$ $(v, w) \mapsto vw$	$conc_B : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ $(n, m) \mapsto n + m$
$new - line :\rightarrow line$	$new - line_A = \triangleright$	$new - line_B = 1$
$make - l : string\ string \rightarrow line$	$make - l_A : A_{string} \times A_{string} \rightarrow A_{line}$ $(v, w) \mapsto vw\triangleright$	$make - l_B : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ $(n, m) \mapsto n + m + 1$
$insert : line\ data \rightarrow line$	$insert_A : A_{line} \times A_{data} \rightarrow A_{line}$ $(w\triangleright, d) \mapsto wd\triangleright$	$insert_B : \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ $(l, x) \mapsto l + x$
$delete : line \rightarrow line$	$delete_A : A_{line} \rightarrow A_{line}$ $w\triangleright \mapsto \begin{cases} v\triangleright & \text{falls } w = vd \text{ mit} \\ & v \in A_{string}, d \in A_{data} \\ \triangleright & \text{sonst} \end{cases}$	$delete_B : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ $l \mapsto \begin{cases} l - 1 & \text{falls } l > 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(8 Punkte)** Gesucht wird ein Σ-Homomorphismus $h : A \rightarrow B$. Denkt dabei an die Länge eines Wortes, die durch $|w| \in \mathbb{N}$ gegeben ist.
   (a) **(3 Punkte)** Stellt die Homomorphiebedingungen für die Operationssymbole $new - line$ und $make - l$ auf.
   (b) **(3 Punkte)** Gebt einen Homomorphismus $h : A \rightarrow B$ an.
   (c) **(2 Punkte)** Beweist, daß h die Homomorphiebedingungen für das Operationssymbol $make - l$ erfüllt.
2. **(2 Punkte)** Beweist, daß es keinen Σ-Homomorphismus $g : B \rightarrow A$ gibt.
3. **(2 Punkte)** Gebt die Trägermengen einer echten Σ-Unteralgebra B' von B an.
4. **(1 Punkt)** Gebt eine Untersignatur Σ' zur Signatur Σ an.

Aufgabe 7, Termeauswertung, Gleichungen, Spezifikation (17 Punkte)

1. **(7 Punkte)** Gegeben sei das Variablensystem X mit
$X_{data} = \{x, y\}$, $X_{string} = \{u, v, w\}$ und $X_{line} = \{l\}$.

   (a) (2 Punkte) Gebt eine vollständige Variablenbelegung $ass : X \to A$ an (Denkt an die Funktionalitäten!) und wertet den Term

   $$insert(make - l(w, empty), x)$$

   schrittweise gemäß der Definition von $xeval(ass)$ aus.
   Hinweis: Ihr könnt in dieser und den weiteren Aufgaben die folgenden abkürzenden Schreibweisen verwenden:

   $$\begin{array}{lll} eva_d & =_{def} & xeval(ass)_{data} \\ eva_s & =_{def} & xeval(ass)_{string} \\ eva_l & =_{def} & xeval(ass)_{line} \end{array}$$

   (b) (5 Punkte) Beweist oder widerlegt die Gültigkeit der folgenden Gleichungen in der Σ-Algebra A (Hier braucht ihr die Terme nicht unbedingt schrittweise auswerten):

   (e) $conc(v, conc(w, empty)) = conc(w, conc(v, empty))$
   (e') $delete(make - l(w, make - s(x))) = make - l(w, empty)$

2. **(3 Punkte)** Gegeben seien folgende Σ-Gleichungen:

   (e1) $conc(w, empty) = w$
   (e2) $conc(empty, w) = w$
   (e3) $conc(conc(u, v), w)) = conc(u, conc(v, w))$
   (e4) $new - line = make - l(empty, empty)$
   (e5) $make - l(v, w) = make - l(conc(v, w), empty)$

   Ergänzt die rechten Seiten der folgenden Σ-Gleichungen, so daß $T_\Sigma/_{\sim E}$ mit $E = \{e1, e2, ..., e8\}$ isomorph zu A ist. (Ohne Beweis!)

   (e6) $insert(make - l(w, v), x) =$
   (e7) $delete(make - l(empty, empty)) =$
   (e8) $delete(make - l(conc(w, make - s(x)), empty) =$

3. **(2 Punkte)** Gebt 4 Elemente der Äquivalenzklasse $[make - l(empty, empty)]_{\sim E}$ an.

4. **(5 Punkte)** Gegeben sei folgende Familie R von Repräsentantensystemen zu den Trägermengen von $T_\Sigma/_{\sim E}$:

   $$\begin{array}{rl} R_{data}: = & \{d1, d2\} \\ R_{string}: = & \{empty\} \cup \{conc(r_s, make - s(r_d))|r_s, \in R_{string}, r_d \in R_{data}\} \\ R_{line}: = & \{make - l(r_s, empty)|r_s \in R_{string}\} \end{array}$$

   Beweist folgende Aussage für die Terme $T_{\Sigma,line}$ durch strukturelle Induktion:

   $$\forall t_l \in T_{\Sigma,line}: \text{ Es gibt ein } r_l \in R_{line} \text{ mit } : t_l \sim^E r_l$$

   Dabei soll der Induktionsschritt nur für die Terme $make - l(t_s, t'_s)$ und $insert(t_s, t_d)$ mit $t_d \in T_{\Sigma,data}$ und $t_s, t'_s \in T_{\Sigma,string}$ durchgeführt werden.
   Die folgenden Aussagen können als gegeben vorausgesetzt werden:

   $$\forall t_d \in T_{\Sigma,data}: \text{ Es gibt ein } r_d \in R_{data} \text{ mit } : t_d \sim^E r_d$$

   und

   $$\forall t_s \in T_{\Sigma,string}: \text{ Es gibt ein } r_s \in R_{string} \text{ mit } : t_s \sim^E r_s$$

Zusatzaufgaben:
Quotiententermalgebra, Repräsentantenalgebra (6 Punkte)

1. **(3 Punkte)** Gebt die Trägermenge Q_{line} der Quotiententermalgebra $Q = T_\Sigma/_{\sim^E}$ an und definert die Abbildungen $new - line_Q$ und $make - l_Q$ (Denkt an die Funktionalitäten!). Dabei können die Trägermengen Q_{data} und Q_{string} als gegeben vorausgesetzt werden.

2. **(3 Punkte)** Erweitert das Repräsentantensystem R aus Aufgabe 7.4 zu einer Repräsentantenalgebra, indem ihr

   (a) zuerst die Familie von bijektiven Abbildungen $r : R \to T_\Sigma/_{\sim^E}$ definiert (ohne Beweis der Bijektivität) und

   (b) dann exemplarisch die Abbildungen $new - line_R$ und $make - l_R$ mit Hilfe der Familie von Abbildungen $norm : T_\Sigma \to R$ mit

   $$norm = r^{-1} \circ nat(T_\Sigma, \sim^E)$$

   angebt.