TheGI 2 im SS 2001:
2. Wiederholungsprüfung am 4. Oktober 2001

Bei der Klausur sind 54 Punkte erreichbar, 18 im ersten und 36 im zweiten Teil. Wer 27 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Mit der Bearbeitung der Zusatzaufgaben (6 Punkte) können nicht erreichte Punkte bei den regulären Klausuraufgaben ausgeglichen werden.

Verschafft Euch zuerst einen Überblick über alle Aufgaben und fangt dann mit der Bearbeitung derjenigen Aufgaben an, die Euch am wenigsten aufwendig erscheinen.

Die häufig geforderten Begründungen meinen keine Beweise, sondern lassen sich kurz in einem Satz abhandeln.

Beginnt bitte jede Aufgabe auf einer neuen Seite. (Wir haben Blätter vorrätig, falls Euer Vorrat verbraucht ist.) Schreibt bitte auf jedes von Euch abgegebene Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer!

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Z	Σ
Punkte	4	3	5	6	6	13	17	6	54 (+6)

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Z	Σ	Note
Punkte										

Teil 1: Mengen, Relationen, Abbildungen, Ordnungen, Äquivalenzrelationen

Aufgabe 1, Mengen (4 Punkte)

1. **(2 Punkte)**
   Gebt folgende Mengen elementweise an:
   (a) $(\{a, b, c\}) \cap (\{a\} \setminus \{a, b\})$
   (b) $(\{a, b\} \times \{1\}) \cup (\{a\} \times \{1, 2\})$

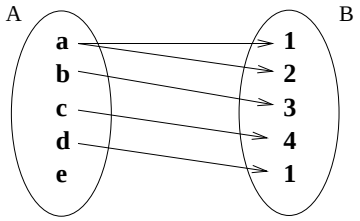
2. **(2 Punkte)** Beweist oder widerlegt die folgenden Aussage:

   $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times B) \cup (C \times D)$

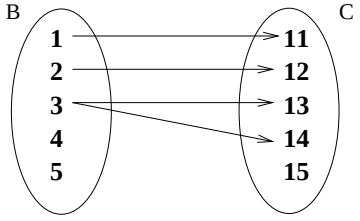
Aufgabe 2, Relationen (3 Punkte)

Seien $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $C = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ drei Mengen und seien die Relationen R_1 vom Typ $A \times B$ und R_2 vom Typ $B \times C$ durch die folgenden Graphen gegeben:

R_1 :



R_2 :



1. **(1 Punkt)** Ist $R_2 \circ R_1$ rechtstotal? Begründung.

2. **(1 Punkt)** Ist $R_2 \circ R_1$ linkseindeutig? Begründung.

3. **(1 Punkt)** Berechnet die folgende Relation und gebt den Graphen der Relation vollständig in Mengenschreibweise oder visualisiert an: $R_3 = R_1^{-1} \circ R_1$

Aufgabe 3, Abbildungen (5 Punkte)

1. **(3 Punkte)** Welche der Eigenschaften injektiv und surjektiv treffen auf die folgende Abbildung zu? Beweist beide Aussagen!

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : x \mapsto \frac{x}{2}$$

2. **(2 Punkte)** Seien zwei Mengen $A = \{(0,1), (1,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$ und $B = \{fehler, wert\}$ gegeben.

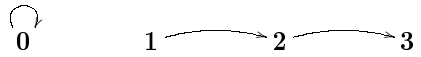
   (a) **(1 Punkt)** Gebt eine Abbildung $f : A \to B$ an, für die gilt:

   $$A/_{Ker(f)} = \{\{(0,1), (1,0)\}, \{(1,1), (2,2), (3,3)\}\}$$

   (b) **(1 Punkt)** Gebt bezüglich $Ker(f)$ ein Repräsentantensystem R von $A/_{Ker(f)}$ an.

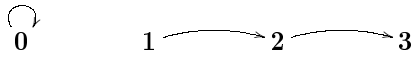
Aufgabe 4, Ordnungen und Äquivalenzrelationen (6 Punkte)

Betrachtet die folgende als Diagramm dargestellte Relation vom Typ $M \times M$ mit $M = \{0, 1, 2, 3\}$:

R_1: 

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(2 Punkt)** Warum ist die Relation R_1 keine partielle Ordnung? Begründung!
2. **(1 Punkt)** Erweitert die Relation R_1 durch Hinzufügen weiterer Paare zu einer totalen Ordnung R_2. Gebt den Graphen von R_2 visualisiert auf diesem Blatt an.
3. **(1 Punkt)** Ordnet die fünf Ziffernfolgen $211, 2, 0, 11$ und 23 aus M^* nach der lexikographischen Ordnung über R_2.
4. **(1 Punkt)** Gegeben sei wiederum die Relation R_1 vom Typ $M \times M$. Berechnet den Abschluß $R_3 = t(s(r(R_1)))$, d.h. erweitert die Relation durch Hinzufügen weiterer Paare zu einer Äquivalenzrelation und gebt den Graphen visualisiert auf diesem Blatt an.

R_1: 

5. **(1 Punkt)** Gebt die Äquivalenzklassen des Quotienten von M bezüglich dieser Äquivalenzrelation elementweise an.

Teil 2: Signatur, Terme, Algebren, Homomorphismen, Termauswertung, Spezifikation

Aufgabe 5, Terme und Termalgebra (6 Punkte)

Gegeben sei die folgende Signatur Σ der positiven rationalen $\mathbb{Q}^+$ (d.h. für $(x, y) \in \mathbb{Q}^+$ gilt: $x, y \in \mathbb{N}^+$).

$\Sigma =$	**sorts**	nat, bruch	
	opns	zero:	$\rightarrow$ nat
		succ:	nat $\rightarrow$ nat
		add:	nat nat $\rightarrow$ nat
		mult:	nat nat $\rightarrow$ nat
		error:	$\rightarrow$ bruch
		make:	nat nat $\rightarrow$ bruch

1. **(2 Punkte)** Gebt zu den Sortensymbolen *nat* und *bruch* je einen Grundterm an, der mindestens 4 Operationssymbole enthält.
2. **(3 Punkte)** Gebt die Trägermenge $T_{\Sigma,bruch}$ der Grundtermalgebra T_Σ an und definiert die Abbildungen $error_{T_\Sigma}$ und $make_{T_\Sigma}$ (Denkt an die Funktionalitäten). Dabei kann die Trägermenge $T_{\Sigma,nat}$ als gegeben vorausgesetzt werden.
3. **(1 Punkt)** Wieviele Elemente müssen die Trägermengen C_{nat} bzw. C_{bruch} einer Σ-Algebra C mindestens enthalten? Begründung.

Aufgabe 6, Homomorphismen (13 Punkte)

Desweiteren seien zwei Σ-Algebren A und B wie folgt definiert:

Σ	A	B
nat $bruch$	$A_{nat} = \mathbb{N}$ $A_{bruch} = \mathbb{Q}^+ \cup \{\bot\}$	$B_{nat} = \{a, b\}$ $B_{bruch} = \{wert, fehler\}$
$zero :\rightarrow nat$	$zero_A = 0$	$zero_B = a$
$succ : nat \rightarrow nat$	$succ_A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $x \mapsto x + 1$	$succ_B : \{a, b\} \rightarrow \{a, b\}$ $x \mapsto b$
$add : nat\ nat \rightarrow nat$	$add_A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $(x, y) \mapsto x + y$	$add_B : \{a, b\} \times \{a, b\} \rightarrow \{a, b\}$ $(x, y) \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } x = y = a \\ b & \text{sonst} \end{cases}$
$mult : nat\ nat \rightarrow nat$	$mult_A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $(x, y) \mapsto x * y$	$mult_B : \{a, b\} \times \{a, b\} \rightarrow \{a, b\}$ $(x, y) \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } x = a \\ & \text{oder } y = a \\ b & \text{sonst} \end{cases}$
$error :\rightarrow bruch$	$error_A = \bot$	$error_B = fehler$
$make : nat\ nat \rightarrow bruch$	$make_A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+ \cup \{\bot\}$ $(x, y) \mapsto \begin{cases} \bot & \text{falls } x = 0 \\ & \text{oder } y = 0 \\ \frac{x}{y} & \text{sonst} \end{cases}$	$make_B : \{a, b\} \times \{a, b\} \rightarrow \{wert, fehler\}$ $(x, y) \mapsto \begin{cases} fehler & \text{falls } x = a \\ & \text{oder } y = a \\ wert & \text{sonst} \end{cases}$

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(8 Punkte)** Gesucht wird ein Σ-Homomorphismus $h : A \rightarrow B$.
   (a) **(3 Punkte)** Stellt die Homomorphiebedingungen für die Operationssymbole $error$ und $make$ auf.
   (b) **(3 Punkte)** Gebt einen Homomorphismus $h : A \rightarrow B$ an.
   (c) **(2 Punkte)** Beweist, daß h die Homomorphiebedingungen für das Operationssymbol $make$ erfüllt.
2. **(2 Punkte)** Beweist, daß es keinen Σ-Homomorphismus $g : B \rightarrow A$ gibt.
3. **(2 Punkte)** Gibt es eine echte Σ-Unteralgebra B' von B? Begründung.
4. **(1 Punkt)** Gebt eine Untersignatur Σ' zur Signatur Σ an.

Aufgabe 7, Termeauswertung, Gleichungen, Spezifikation (17 Punkte)

1. **(7 Punkte)** Gegeben sei das Variablensystem X mit
$$X_{nat} = \{x, y, n, m\} \text{ und } X_{bruch} = \{u\}$$

   (a) (2 Punkte) Gebt eine vollständige Variablenbelegung $ass : X \to A$ an (Denkt an die Funktionalitäten!) und wertet den Term
   $$make(mult(add(x, succ(y)), n), zero)$$
   schrittweise gemäß der Definition von $xeval(ass)$ aus.
   Hinweis: Ihr könnt in dieser und den weiteren Aufgaben die folgenden abkürzenden Schreibweisen verwenden:
   $$\begin{array}{lll} eva_n & =_{def} & xeval(ass)_{nat} \text{ und} \\ eva_b & =_{def} & xeval(ass)_{bruch} \end{array}$$

   (b) (5 Punkte) Beweist oder widerlegt die Gültigkeit der folgenden Gleichungen in der Σ-Algebra A (Hier braucht ihr die Terme nicht unbedingt schrittweise auswerten):

   (e) $add(mult(x, zero), succ(y)) = mult(add(succ(x), zero), y)$
   (e') $make(add(succ(x), y), mult(x, zero)) = error$

2. **(3 Punkte)** Gegeben seien folgende Σ-Gleichungen, der Gleichungsmenge $E = \{e1, \ldots, e8\}$:

   (e1) $add(x, zero) = x$
   (e2) $add(x, succ(y)) = succ(add(x, y))$
   (e3) $mult(x, zero) = zero$
   (e4) $mult(x, succ(y)) = add(mult(x, y), x)$

   Ergänzt die rechten Seiten der folgenden Σ-Gleichungen, so daß die Σ-Algebra A die Gleichungen erfüllt. (Ohne Beweis!)

   (e6) $make(x, zero) =$
   (e7) $make(zero, x) =$
   (e8) $make(mult(succ(x), succ(n)), mult(succ(y), succ(n))) =$

3. **(2 Punkte)** Gebt 4 Elemente der Äquivalenzklasse $[make(suc(zero), zero)]_{\sim^E}$ an.

4. **(5 Punkte)** Gegeben sei folgendes Repräsentantensystemen zu der Trägermenge von $T_\Sigma/_{\sim^E,nat}$:
   $$R_{nat} := \{zero\} \cup \{succ(t) | t \in R_{nat}\}$$
   Beweist folgende Aussage für die Terme $T_{\Sigma,nat}$ durch strukturelle Induktion:
   $$\forall t \in T_{\Sigma,nat} : \text{ Es gibt ein } r \in R_{nat} \text{ mit } : t \sim^E r$$
   Dabei soll der Induktionsschritt nur für die Terme $add(zero, t)$ und $mult(zero, t)$ mit $t \in T_{\Sigma,nat}$ durchgeführt werden.

Zusatzaufgaben:
Quotiententermalgebra, Repräsentantenalgebra (6 Punkte)

1. **(3 Punkte)** Gebt die Trägermenge Q_{bruch} der Quotiententermalgebra $Q = T_\Sigma/_{\sim E}$ an und definert die Abbildungen $error_Q$ und $make_Q$ (Denkt an die Funktionalitäten!). Dabei kann die Trägermenge Q_{nat} als gegeben vorausgesetzt werden.

2. **(3 Punkte)** Erweitert die Signatur Σ um zwei Operationssymbole $add - bruch$ und $mult - bruch$ für rationale Zahlen und ergänzt die rechten Seite der folgenden Gleichungen, so daß die Addition und Multiplikation der rationalen Zahlen auf die Addition und Multiplikation der natürlichen Zahlen zurückgeführt wird:

   (e9) $add - bruch(make(x, y), make(n, m)) =$

   (e10) $mult - bruch(make(x, y), make(n, m)) =$