Theoretische Grundlagen der Informatik II

Sommersemester 2005

Veranstalter: Hartmut Ehrig, Andi Rayo Kniep, Leen Lambers

Klausur am 12. Juli 2005

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Wer 25 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Mit der Bearbeitung der Zusatzaufgaben (5 Punkte) können nicht erreichte Punkte bei den regulären Klausuraufgaben ausgeglichen werden.
Verschafft Euch zuerst einen Überblick über alle Aufgaben und fangt dann mit der Bearbeitung derjenigen Aufgaben an, die Euch am wenigsten aufwendig erscheinen.
Die häufig geforderten Begründungen meinen keine Beweise, sondern lassen sich kurz in einem Satz abhandeln.
Beginnt bitte jede Aufgabe auf einer neuen Seite. (Wir haben Blätter vorrätig, falls Euer Vorrat verbraucht ist.) Schreibt bitte auf jedes von Euch abgegebene Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer!

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

(Tutorin / Tutor:)

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ	4(g)	5(e)
Punkte	5	6	4	9	13	13	50	+2	+3

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ	Note
Punkte											

1. **Aufgabe, Mengen (5 Punkte)**

   (a) **(3 Punkte)** Beweist oder widerlegt für beliebige Mengen A und B (**Bemerkung:** $|A|$ ist die Anzahl der Elemente in der Menge A):

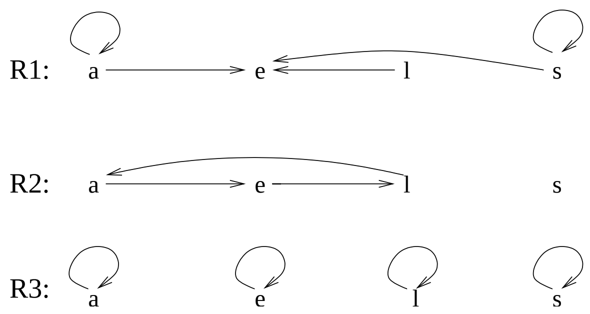
      i. $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$

      ii. $|\mathcal{P}(A \times B)| = |A \cup B| + |A \cap B|$

   (b) **(2 Punkte)** Gebt zu den vorhergehenden Aussagen Belegungen für A, B an, so dass die Gleichungen erfüllt werden. Es soll gelten, dass A und B unterschiedlich und ungleich der leeren Menge sind.

2. **Aufgabe, Relationen und Ordnungen (6 Punkte)**

Betrachtet im Folgenden die Mengen $A = \{a, e, l, s\}$ und $B = \{1, 2\}$ und die Relationen R_1, R_2, R_3 des Typs $A \times A$:



(a) **(2 Punkte)** Gebt eine Relation R des Typs $A \times B$ und eine Relation R' des Typs $B \times A$ an, so dass folgendes gilt:

- R ist rechtstotal, rechtseindeutig, aber nicht linkstotal und nicht linkseindeutig
- $R' \circ R$ ist rechtstotal und linkseindeutig

Stellt R visuell und R' in Mengendarstellung dar.

(b) **(1 Punkt)** Welche der Relationen $R1 - R3$ sind partielle Ordnungen? Begründet für alle anderen, warum sie keine partiellen Ordnungen sind.

(c) **(1 Punkt)** Welche der Relationen $R1 - R3$, die keine partielle Ordnung ist, könnt ihr durch Hinzufügen weiterer Paare zu einer partiellen Ordnung erweitern? Gebt diese Paare für diese Relation an.

(d) **(2 Punkte)** Betrachtet die totale Ordnung
$R_4 = \{(a, a), (e, e), (l, l), (s, s), (s, a), (l, e), (a, e), (s, l), (l, a), (s, e)\}$ auf $A = \{a, e, l, s\}$.
Sind die folgenden Reihen von Wörtern aus A^* nach lexikographischer Ordnung und / oder Standardordnung über R_4 oder nach keiner von beiden geordnet? Begründet kurz eure Antwort, wenn die Reihe NICHT nach lexikographischer bzw. Standardordnung geordnet ist.

i. $seele, ass, aas, aal$
ii. $es, esse, esel, elle$
iii. $sessel, lasse, aas, es, elsass, esel$

3. **Aufgabe, Abbildungen und Repräsentantensystem (4 Punkte)**

(a) **(2 Punkte)** Welche Eigenschaft (injektiv oder surjektiv) trifft auf die folgende Abbildung zu und welche nicht? Beweist eure Aussagen! (**Bemerkung:** $\mathbb{N}$ steht für alle natürlichen Zahlen inkl. der 0.)

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$(n, m) \mapsto n$$

(b) **(1 Punkt)** Gebt das Urbild $f^{-1}(B)$ an, wobei $B = \{100, 200\}$.

(c) **(1 Punkt)** Gebt ein Repräsentantensystem S bzgl. der Quotientenmenge $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_{Ker(f)}$ an.

Seien die Signatur *Firm* und die *Firm*-Algebren *A* und *B* für die nachfolgenden Aufgaben der Klausur gegeben:

$Firm$ =	**sorts**	people, money	
	opns	prakti:	→ people
		super:	people → people
		minWage:	→ money
		wage:	people → money
		futWage:	people money → money

A	B
$A_{people} = \{p\} \cup \{m_i \vert 1 \leq i \leq 5\}$ $A_{money} = \{320, 550, 600, 650, 700, 1000\}$	$B_{people} = \{p\}$ $B_{money} = \{320\}$
$prakti_A = p \in A_{people}$ $super_A : A_{people} \to A_{people}$ $p \mapsto m_1$ $m_i \mapsto m_{i+1}, \quad 1 \leq i < 5$ $m_5 \mapsto m_5$ $minWage_A = 320 \in A_{money}$ $wage_A : A_{people} \to A_{money}$ $p \mapsto 320$ $m_1 \mapsto 550$ $m_2 \mapsto 600$ $m_3 \mapsto 650$ $m_4 \mapsto 700$ $m_5 \mapsto 1000$ $futWage_A : A_{people} \times A_{money} \to A_{money}$ $(p, z) \mapsto 550$ $(m_1, z) \mapsto 600$ $(m_2, z) \mapsto 650$ $(m_3, z) \mapsto 700$ $(m_4, z) \mapsto 1000$ $(m_5, z) \mapsto 1000$	$prakti_B = p \in B_{people}$ $super_B : B_{people} \to B_{people}$ $p \mapsto p$ $minWage_B = 320 \in B_{money}$ $wage_B : B_{people} \to B_{money}$ $p \mapsto 320$ $futWage_B : B_{people} \times B_{money} \to B_{money}$ $(p, 320) \mapsto 320$

4. **Aufgabe, Terme, Auswertung von Termen und Gleichungen (9 + 2 Punkte)**

   Gegeben sei das Variablensystem $X = (X_{people}, X_{money})$ mit
   $X_{people} = \{w\}$ und $X_{money} = \{x\}$.
   Sei $ass : X \to A$ eine Variablenbelegung mit

$$\begin{array}{rcl} ass_{people}(w) & = & m_3 \\ ass_{money}(x) & = & 550 \end{array}$$

   Außerdem seien
   $t := wage(super(super(prakti)))$
   $u := futWage(super(prakti), wage(super(prakti)))$
   $v := futWage(super(w), x)$.

   (a) **(1 Punkt)** Gebt einen Grundterm (ungleich zu t, u, v) zur Sorte $money$ an, der mindestens 3 **verschiedene** Operationssymbole enthält.

   (b) **(1 Punkt)** Gebt einen Term mit Variablen (ungleich zu t, u, v) zur Sorte $people$ an mit mindestens 3 Operationssymbolen.

   (c) **(2 Punkte)** Wertet den Term v schrittweise gemäß der Variablenbelegung $ass : X \to A$ und der Definition von $xeval(ass)$ in der $Firm$-Algebra A aus.
   Hinweis: Ihr könnt in dieser und den weiteren Aufgaben die folgenden abkürzenden Schreibweisen verwenden:

$$\begin{array}{lll} eva_p & =_{def} & xeval(ass)_{people} \\ eva_m & =_{def} & xeval(ass)_{money} \end{array}$$

   (d) **(1 Punkt)** Gebt zwei Terme t_1, t_2 an, die semantisch äquivalent zu t in der $Firm$-Algebra A sind. Dabei sollen t_1, t_2, t paarweise verschieden sein. (ohne Beweis)

   (e) **(3 Punkte)** Beweist oder widerlegt die Gültigkeit der folgenden Gleichungen in der $Firm$-Algebra A (Hier braucht ihr die Terme nicht schrittweise auswerten.):

   i. $t = u$

   ii. $v = futWage(prakti, wage(super(super(w))))$

   (f) **(1 Punkt)** Gebt einen Term t_3 an, der semantisch unterschiedlich zu t in der $Firm$-Algebra A ist, aber semantisch gleich zu t in der Algebra $Firm$-B.

   (g) **Zusatzaufgabe (+2 Punkte)** Sei $\Sigma = (S, OP)$ eine beliebige Signatur und T_Σ die Grundtermalgebra von Σ. Beweist oder widerlegt folgende Aussage:
   Wenn es in Σ n verschiedene Operationen gibt, also $|OP| = n$, dann gibt es mindestens n verschiedene Terme in T_Σ, also $\sum_{s \in S} |T_{\Sigma,s}| \geq n$.

5. **Aufgabe, Homomorphismen und Algebren (13 + 3 Punkte)**

(a) **(2 Punkte)**

i. **(1 Punkt)** Gebt einen $Firm$-Homomorphismus $h : A \to B$ an.

ii. **(1 Punkt)** Beweist, daß h die Homomorphiebedingung für das Operationssymbol $futWage$ erfüllt.

(b) **(2 Punkte)** Beweist, daß es keinen $Firm$-Homomorphismus $g : B \to A$ gibt.

(c) **(6 Punkte)**

i. **(1 Punkt)** Gebt eine nicht leere, echte Untersignatur $Firm'$ von $Firm$ an.

ii. **(1 Punkt)** Gebt eine $Firm'$-Algebra C an, die weder ein $Firm'$-Redukt der $Firm$-Algebra A noch der $Firm$-Algebra B ist.

iii. **(1 Punkt)** Gebt eine Unteralgebra D von B an.

iv. **(3 Punkte)** Beweist oder widerlegt folgende Aussage:
Es gibt eine Unteralgebra A' von A, deren Trägermengen nur 1 Element besitzen.

(d) **(3 Punkte)** Seien $\Sigma = (S, OP)$ eine beliebige Signatur und A, B zwei beliebige Σ-Algebren. Sei $A \times B$ eine weitere Σ-Algebra, die wie folgt definiert ist:
$\forall s \in S : (A \times B)_s = A_s \times B_s$
$\forall (op : s_1 \cdots s_n \to s) \in OP$:
$op_{A\times B} : (A \times B)_{s_1} \times \cdots \times (A \times B)_{s_n} \to (A \times B)_s$
$op_{A\times B}((a_1, b_1), \cdots, (a_n, b_n)) = (op_A(a_1, \cdots, a_n), op_B(b_1, \cdots, b_n))$

i. **(1 Punkt)** Findet einen Σ-Homomorphismus $h : A \times B \to A$.

ii. **(2 Punkte)** Beweist die Operationsverträglichkeit von h.

(e) **Zusatzaufgabe (+ 3 Punkte)** Sei Σ eine beliebige Signatur und A,B zwei Σ-Algebren. Beweist die folgende Aussage:
Wenn $eval(A)$ surjektiv ist, gibt es max. einen Σ-Homomorphismus $h : A \to B$.

6. **Aufgabe, Spezifikation und Quotiententermalgebra (13 Punkte)**

(a) **(3 Punkte)** Beweist oder widerlegt: $eval(A)_{people}$ ist injektiv bzw. surjektiv.

(b) **(1 Punkt)** Gegeben sei das Variablensystem $X = (X_{people}, X_{money})$ mit $X_{people} = \{w\}$ und $X_{money} = \{x\}$. Ergänzt die folgenden $Firm$-Gleichungen, um eine weitere Gleichung (e3), so daß $T_{Firm}/_{\sim^E}$ mit $E = \{e1, e2, e3\}$ isomorph zu A ist (Ohne Beweis!):

$$\begin{array}{ll} (e1) & wage(prakti) = minWage \\ (e2) & futWage(w, x) = wage(super(w)) \end{array}$$

(c) **(2 Punkte)** Gebt 3 verschiedene Elemente der Äquivalenzklasse

$$[futWage(prakti, minWage)]_{\sim^E_{money}}$$

an, wobei mindestens ein Element ohne das Operationssymbol $futWage$ auskommen soll.

(d) **(2 Punkte)** Gebt die Quotiententermalgebra $T_{SP} = T_{Firm}/_{\sim^E}$ an.

(e) **(2 Punkte)** Gebt ein Repräsentantensystem $R = (R_{people}, R_{money})$ zu jeder Trägermenge der Quotiententermalgebra an.

(f) **(3 Punkte)** Beweist mit struktureller Induktion, dass
$\forall t \in T_{Firm,people} : \exists r \in R_{people}$, so dass $t \sim^E r$.