TheGI 2 im SS 1995: Klausur am 5. Juli 1995

Ihr sollt in dieser Klausur häufig Dinge selbst definieren: Mengen, Relationen, Abbildungen, Ordnungen, Algebren, Homomorphismen. Wie Ihr das tut, bleibt Euch überlassen, solange Ihr einen eindeutigen Weg findet. Für Abbildungen habt Ihr beispielsweise die Möglichkeit, die Menge von Paaren anzugeben, aus denen die Abbildung als spezielle Relation besteht. Ihr könnt die Abbildung als Relation geeignet visualisieren, so, wie wir es in der Veranstaltung mit Relationen eingeführt haben. Ihr könnt auch in Termschreibweise für eine Abbildung f angeben, welchen Wert $f(x)$ für alle x des Definitionsbereichs sie liefert. Dabei muß man des Häufigeren Fallunterscheidungen machen, wie Ihr es bei vielen Definitionen von Abbildungen in Algebren oder zur Definition von Homomorphismen im Skript, auf den Ergänzungsblättern und in den Übungsaufgaben gesehen habt.

Aussagen und Mengen

- **Aufgabe 1.1 (1 Punkt)**

  Berechnet: $\mathcal{P}(\{1\}) \times \{a, b\}$

- **Aufgabe 1.2 (1 Punkt)**

  Sei B eine beliebige Menge. Für welche in Abhängigkeit von B zu definierende Menge A gilt in jedem Fall:

  $$A \cup B = A \cap B$$

- **Aufgabe 1.3 (2 Punkte)**

  Zeigt mit einem vollständigen formalen Beweis die Gültigkeit der folgenden Aussage für alle Mengen A, B:

  $$A \subseteq B \implies A \cap B = A$$

Relationen

Gebt Euch beliebige Mengen A, B und C und zwei Relationen $R_1 \subseteq A \times B$ und $R_2 \subseteq B \times C$ so vor, daß gilt:

- **Aufgabe 2.1 (1 Punkt)**

  Die Relation R_1 ist *linkstotal* und *linkseindeutig* aber weder *rechtstotal* noch *rechtseindeutig.*

- **Aufgabe 2.2 (1 Punkt)**

  Die Relation R_2 ist *linkstotal* und *rechtseindeutig* aber weder *rechtstotal* noch *linkseindeutig.*

- **Aufgabe 2.3 (2 Punkte)**

  Berechnet die Relation $R_2 \circ R_1$. Welche der Eigenschaften *linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig, rechtseindeutig* treffen auf $R_2 \circ R_1$ zu?

Abbildungen

- **Aufgabe 3.1 (1 Punkt)**
  Definiert eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die injektiv aber nicht surjektiv ist.
- **Aufgabe 3.2 (1 Punkt)**
  Definiert eine Abbildung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die surjektiv aber nicht injektiv ist.
- **Aufgabe 3.3 (1 Punkt)**
  Gebt die Komposition $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, als Menge von Paaren, als graphische Visualisierung oder als Beschreibung mit Termen (siehe Einleitung).
- **Aufgabe 3.4 (1 Punkt)**
  Gebt die Komposition $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an (s. o.).

Ordnungen

- **Aufgabe 4.1 (1 Punkt)**
  Definiert eine partielle Ordnung R auf der Menge $\{\oplus, \ominus, \otimes\}$.
- **Aufgabe 4.2 (3 Punkte)**
  Gebt drei verschiedene Möglichkeiten an, die partielle Ordnung R zu einer partiellen Ordnung auf der Menge $\{\oplus, \ominus, \otimes, \oslash\}$ zu erweitern. Das heißt: gebt

$$R_1, R_2, R_3 \subseteq \{\oplus, \ominus, \otimes, \oslash\} \times \{\oplus, \ominus, \otimes, \oslash\}$$

  so an, daß:

  1. R_1, R_2, R_3 partielle Ordnungen sind,
  2. $R \subseteq R_1$, $R \subseteq R_2$ und $R \subseteq R_3$,
  3. $R_1 \neq R_2$, $R_1 \neq R_3$ und $R_2 \neq R_3$.

Äquivalenzrelationen, Datenstrukturen und Terme

Gegeben sei folgende Signatur:

$$
\begin{array}{lll}
\text{SIG:} & \textbf{sorts:} & s, t \\
 & \textbf{opns:} & a, b, c : \to s \\
 & & p : \to t \\
 & & f, g : s \to t
\end{array}
$$

und die darauf aufbauende Spezifikation:

$$
\begin{array}{lll}
\text{SPEC:} & \text{SIG} + & \\
 & \textbf{vars:} & x : s \\
 & \textbf{eqns:} & f(x) = g(x)
\end{array}
$$

- **Aufgabe 5.1 (2 Punkte)**

  Gebt für jede Sorte der Signatur SIG die Menge von Grundtermen an.

- **Aufgabe 5.2 (2 Punkte)**

  Gebt für jede Sorte der Spezifikation SPEC die Menge *aller* Terme über der Spezifikation SPEC an. Die Mengen von Variablensymbolen sind dabei $X_s = \{x\}$ und $X_t = \emptyset$.

- **Aufgabe 6.1 (2 Punkte)**

  Gebt auf den Mengen von Grundtermen zu jeder Sorte zwei Relationen an:

  $$R_s \subseteq T_{SIG,s} \times T_{SIG,s} \tag{1}$$
  $$R_t \subseteq T_{SIG,t} \times T_{SIG,t} \tag{2}$$

  Dabei sollen zwei Terme zu einer Sorte genau dann in Relation stehen, wenn sie mit Hilfe von Termersetzung in einander überführt werden können. Das Termersetzungssystem hat dabei die aus der Gleichung abgeleiteten Regeln

  $$
  \begin{array}{rl}
  \text{L-R: } f(x) & \Rightarrow\ g(x) \\
  \text{R-L: } g(x) & \Rightarrow\ f(x)
  \end{array}
  $$

  Achtet genau auf die Definition von $\stackrel{*}{\Rightarrow}$!

  Gebt die Relationen jeweils als Mengen von Paaren an.

- **Aufgabe 6.2 (2 Punkte)**

  Warum sind R_s und R_t Äquivalenzrelationen? Begründet beide Antworten anhand der oben formulierten Definition der Relationen.

- **Aufgabe 7 (4 Punkte)**

  Gebt zwei Algebren A und B zur Signatur SIG an. In A soll die Gleichung in SPEC gelten, in B nicht. Bedenkt bei Eurer Wahl, daß Ihr in der nächsten Aufgabe die (Nicht-) Existenz von Homomorphismen zwischen A und B untersuchen sollt. Wählt die Algebren deshalb möglichst einfach und übersichtlich!

Homomorphismen

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Überlegt Euch, ob es zwischen den von Euch gewählten Algebren A und B Homomorphismen $h_1 : A \to B$ oder $h_2 : B \to A$ gibt. Beweist eine Eurer Antworten formal. Ihr könnt also entweder nachweisen, daß in einer Richtung ein Homomorphismus existiert oder, daß er nicht existiert.

Falls Ihr nachweisen wollt, daß *kein* Homomorphismus existiert, könnt Ihr Euch auf die Argumentation des entsprechenden Ergänzungsblatts stützen. Wollt Ihr hingegen die Existenz eines Homomorphismusses nachweisen, so müßt Ihr zunächst einen Homomorphismus, also für jede Sorte eine Abbildung definieren und dann seine Eigenschaften einzeln nachweisen.

Es reicht in jedem Fall *ein* Beweis. Entweder eine Nichtexistenz *oder* eine Existenz nachweisen!

Gleichungen

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Betrachtet die folgende Spezifikation der natürlichen Zahlen:

$$
\begin{array}{lll}
\text{NAT-ADD-MULT:} & \textbf{sorts:} & Nat \\
& \textbf{opns:} & z : \to Nat \\
& & s : Nat \to Nat \\
& & add, mult : Nat, Nat \to Nat \\
& \textbf{vars:} & n_1, n_2 : Nat \\
& \textbf{eqns:} & \mathbf{1}\text{: } add(z, n_1) = n_1 \\
& & \mathbf{2}\text{: } add(s(n_1), n_2) = s(add(n_1, n_2)) \\
& & \mathbf{3}\text{: } mult(z, n_1) = z \\
& & \mathbf{4}\text{: } mult(s(n_1), n_2) = add(mult(n_1, n_2), n_2)
\end{array}
$$

Beweist durch Termersetzung über den Gleichungen **1** bis **4**:

$$mult(s(s(z)), s(s(z))) \stackrel{*}{\Rightarrow} s(s(s(s(z))))$$

Dabei unterstreicht bitte jeweils den Teilterm, auf den Ihr eine Gleichung zur Termersetzung anwendet und gebt jeweils die Nummer der benutzten Gleichung an!

Termalgebren

- **Aufgabe 10.1 (3 Punkte)**
  Definiert vollständig die Termalgebra T_{SIG} zu der auf Seite 3 angegebenen Signatur SIG.
- **Aufgabe 10.2 (1 Punkt)**
  Erfüllt T_{SIG} die Gleichung in SPEC?