TheGI 2: Musterlösung der Klausur vom 5. Juli 1995

Aussagen und Mengen

Aufgabe 1.1

$$\begin{array}{rl} & \mathcal{P}(\{1\}) \times \{a,b\} \\ = & \{\emptyset, \{1\}\} \times \{a,b\} \\ = & \{(x,y) | x \in \{\emptyset, \{1\}\} \wedge y \in \{a,b\}\} \\ = & \{(\emptyset, a), (\emptyset, b), (\{1\}, a), (\{1\}, b)\} \end{array}$$

Aufgabe 1.2

$A = B$, denn es gilt immer: $B \cup B = B \cap B = B$

Aufgabe 1.3

Zu zeigen ist: $A \subseteq B \Longrightarrow A \cap B = A$

Annahme: $A \subseteq B$ Das ist äquivalent zu der Aussage:

$$x \in A \Longrightarrow x \in B \tag{1}$$

Zu zeigen: $A \cap B = A$ Gleichheit von Mengen zeigt man durch gegenseitige Inklusion:

1.
$$\begin{array}{rl} & A \cap B \subseteq A \\ \Longleftrightarrow & [x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A] \\ \Longleftrightarrow & [(x \in A \wedge x \in B) \Rightarrow x \in A] \end{array}$$
Das gilt offensichtlich!

2.
$$\begin{array}{rl} & A \subseteq A \cap B \\ \Longleftrightarrow & [x \in A \Rightarrow x \in (A \cap B)] \\ \Longleftrightarrow & [x \in A \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B)] \end{array}$$
Das folgt unmittelbar aus der Annahme, Gleichung 1 oben.

Relationen

Aufgabe 2.1

$A = \{1, 2\}$
$B = \{a, b, c, d\}$
$R_1 = \{(1, a), (1, b), (2, c)\}$

R_1 ist:

- **linkstotal**, weil für alle Elemente $x \in A$ ein Paar $(x, y) \in R_1$ existiert;
- **linkseindeutig**, weil es kein Element $y \in B$ gibt mit $(1, y) \in R_1$ und $(2, y) \in R_1$;
- **nicht rechtstotal**, weil für $d \in B$ kein Element $x \in A$ existiert mit $(x, d) \in R_1$;
- **nicht rechtseindeutig**, weil $(1, a) \in R_1$ und $(1, b) \in R_1$, aber $a \neq b$!

Aufgabe 2.2

$C = \{\blacksquare, \blacklozenge\}$
$R_2 = \{(a, \blacksquare), (b, \blacksquare), (c, \blacksquare), (d, \blacksquare)\}$

Aufgabe 2.3

$R_2 \circ R_1 = \{(1, \blacksquare), (2, \blacksquare)\}$
$R_2 \circ R_1$ ist linkstotal, *nicht* rechtstotal, *nicht* linkseindeutig und rechtseindeutig.

Abbildungen

Aufgabe 3.1

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; x \mapsto x + 1$

Aufgabe 3.2

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; x \mapsto \begin{cases} 0 \, ; x = 0 \\ x - 1 \, ; x \neq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3.3

$$f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; x \mapsto f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 1 \, ; x = 0 \\ x \, ; x \neq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3.4

$g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = x$

Ordnungen

Aufgabe 4.1

$R = \{(\oplus, \oplus), (\ominus, \ominus), (\otimes, \otimes), (\oplus, \ominus), (\oplus, \otimes)\}$

Aufgabe 4.2

$R_1 = R \cup \{(\oslash, \oslash)\}$
$R_2 = R_1 \cup \{(\ominus, \oslash), (\oplus, \oslash)\}$
$R_3 = R_1 \cup \{(\oslash, \ominus), (\oslash, \oplus), (\oslash, \otimes)\}$

Äquivalenzrelationen, Datenstrukturen und Terme

Aufgabe 8.1

$T_{SIG,s} = \{a, b, c\}$
$T_{SIG,t} = \{p, f(a), f(b), f(c), g(a), g(b), g(c)\}$

Aufgabe 8.2

$T_{SIG,s}(\{x\}) = \{a, b, c, x\} = T_{SIG,s} \cup \{x\}$
$T_{SIG,t}(\{x\}) = T_{SIG,t} \cup \{f(x), g(x)\}$

Aufgabe 5.1

1. $R_s \subseteq T_{SIG,s} \times T_{SIG,s}$
   $R_s = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$, denn das Termersetzungssystem kann keinen der Terme a, b oder c in einen anderen überführen.
2. $R_t \subseteq T_{SIG,t} \times T_{SIG,t}$
   $R_t = \{(x,x) | x \in T_{SIG,t} \cup$
   $\{(f(a),g(a)),(g(a),f(a)),(f(b),g(b)),(g(b),f(b)),(f(c),g(c)),(g(c),f(c))\}$

Aufgabe 5.2

R_s bzw. R_t ist

- **reflexiv**, da jeder Term t in 0 Schritten zu sich selbst überführt werden kann, also $t \overset{0}{\Rightarrow} t$ und daher $(t,t) \in R_s$ bzw. R_t;
- **symmetrisch**, da das Termersetzungssystem symmetrisch ist (für jede L-R-Regel gibt es die entsprechende R-L-Regel, die jede Regelanwendung rückgängig machen kann). Kann also t in t' überführt werden, so mit den selben Regeln in umgekehrter Richtung auch t' in t. Daher wann immer $(t,t') \in R_s$ bzw. R_t, dann auch das Paar (t',t);
- **transitiv**, da sich Termersetzungsketten aneinanderfügen lassen: falls $t_1 \overset{*}{\Rightarrow} t_2$ und falls $t_2 \overset{*}{\Rightarrow} t_3$, dann auch $t_1 \overset{*}{\Rightarrow} t_3$. Also folgt aus $\{(t_1,t_2),(t_2,t_3)\} \subseteq R_s$ bzw. R_t auch $(t_1,t_3) \in R_s$ bzw. R_t.

Aufgabe 6

$A_s = \mathbb{N}$
$A_t = \mathbb{N}$
$a_A = 0 \quad p_A = 4711$
$b_A = 1 \quad f_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; x \mapsto x^2$
$c_A = 17 \quad g_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; x \mapsto x + 10$

In A gilt die Gleichung *nicht*, denn für $ass(A)_s : \{x\} \to A_s = \mathbb{N}; x \mapsto 10$ gilt:

$$\begin{aligned}
& eass(ass)(A)_s(f(x)) \\
=\ & f_A(ass(x)) \\
=\ & f_A(10) \\
=\ & 100 \\
\neq\ & 20 \\
=\ & g_A(10) \\
=\ & g_A(ass(x)) \\
=\ & eass(ass)(A)_s(g(x))
\end{aligned}$$

$B_s = \{*\}$
$B_t = \{*\}$
$a_B = * \quad p_B = *$
$b_B = * \quad f_B = \{(*,*)\}$
$c_B = * \quad g_B = \{(*,*)\}$

Da der Wertebereich von $eass(ass)(B)_t : T_{SIG,t}(\{x\}) \to B_t = \{*\}$ nur ein Element enthält, muß *jede* Gleichung in B zur Sorte t gelten.

Homomorphismen

Aufgabe 7

Grundtermtabelle zur Sorte s:

	A	B
a	0	$*$
b	1	$*$
c	17	$*$

Grundtermtabelle zur Sorte t:

	A	B
p	4711	$*$
$f(a)$	0	$*$
$f(b)$	1	$*$
$f(c)$	289	$*$
$g(a)$	10	$*$
$g(b)$	11	$*$
$g(c)$	27	$*$

1. Es existiert *kein* Homomorphismus $h_2 : B \to A$, denn dann müßte z. B. für alle Grundterme k der Sorte s gelten:

   $$h_{2,s}(eval(B)_s(k)) = eval(A)_s(k)$$

   Also für $k = a$:

   $$\begin{array}{rrcl} & h_{2,s}(eval(B)_s(a)) & = & eval(A)_s(a) \\ \Longleftrightarrow & h_{2,s}(a_B) & = & a_A \\ \Longleftrightarrow & h_{2,s}(*) & = & 0 \end{array}$$

   Jedoch für $t = b$ auch:

   $$\begin{array}{rrcl} & h_{2,s}(eval(B)_s(b)) & = & eval(A)_s(b) \\ \Longleftrightarrow & h_{2,s}(b_B) & = & b_A \\ \Longleftrightarrow & h_{2,s}(*) & = & 1 \end{array}$$

   Also kann $h_{2,s}$ nicht rechtseindeutig definiert werden.

2. Es existiert ein Homomorphismus $h_1 : A \to B$ definiert durch:
   $h_{1,s} : A_s \to B_s$, also $h_{1,s} : \mathbb{N} \to \{*\}; n \mapsto *$
   $h_{1,t} : A_t \to B_t$, also $h_{1,t} : \mathbb{N} \to \{*\}; n \mapsto *$
   Zu zeigen sind die folgenden Gleichungen:

   $$\begin{array}{rcl} h_{1,s}(a_A) & = & a_B \\ h_{1,s}(b_A) & = & b_B \\ h_{1,s}(c_A) & = & c_B \\ h_{1,t}(p_A) & = & p_B \\ h_{1,t}(f_A(x)) & = & f_B(h_{1,s}(x)) \\ h_{1,t}(g_A(x)) & = & g_B(h_{1,s}(x)) \end{array}$$

   Jede der obigen Gleichungen ist gemäß der gewählten Definitionen äquivalent zu der Gleichung $* = *$, also erfüllt.

Gleichungen

Aufgabe 9

$$
\begin{aligned}
& \underline{mult(s(s(z)), s(s(z))} \\
\stackrel{4}{\Longrightarrow}\ & add(\underline{mult(s(z), s(s(z)))}, s(s(z))) \\
\stackrel{4}{\Longrightarrow}\ & add(add(\underline{mult(z, s(s(z)))}, s(s(z))), s(s(z))) \\
\stackrel{3}{\Longrightarrow}\ & add(\underline{add(z, s(s(z)))}, s(s(z))) \\
\stackrel{1}{\Longrightarrow}\ & \underline{add(s(s(z)), s(s(z)))} \\
\stackrel{2}{\Longrightarrow}\ & s(\underline{add(s(z), s(s(z)))}) \\
\stackrel{2}{\Longrightarrow}\ & s(s(\underline{add(z, s(s(z)))})) \\
\stackrel{1}{\Longrightarrow}\ & s(s(s(s(z))))
\end{aligned}
$$

Termalgebren

Aufgabe 10.1

SIG	T_{SIG}
s	$T_{SIG,s} = \{a, b, c\}$
t	$T_{SIG,t} = \{p, f(a), f(b), f(c), g(a), g(b), g(c)\}$
$a : \to s$	$a_{T_{SIG}} = a$
$b : \to s$	$b_{T_{SIG}} = b$
$c : \to s$	$c_{T_{SIG}} = c$
$p : \to t$	$p_{T_{SIG}} = p$
$f : s \to t$	$f_{T_{SIG}}(x) = f(x)$
$g : s \to t$	$g_{T_{SIG}}(x) = g(x)$

Aufgabe 10.2

NEIN: da verschiedene Terme in der Termalgebra zu verschiedenen Elementen ausgewertet werden, gilt in der Termalgerba keine nicht triviale Gleichung. Oder formal: Sei zum Beispiel $ass(T_{SIG})_s : \{x\} \to \{a, b, c\}; x \mapsto a$, dann gilt:
$eass(ass)(f(x)) = f_{T_{SIG}}(a) = f(A)$, aber
$eass(ass)(g(x)) = g_{T_{SIG}}(a) = g(A)$