TheGI 2 im SS 1996: Klausur am 4. Juli 1996

Bei der Klausur sind 36 Punkte erreichbar, 18 in jedem der beiden Teile. Wer 18 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden.

Lest Euch auf jeden Fall zuerst alle Aufgaben in Ruhe durch und fangt dann mit der Bearbeitung derjenigen Aufgaben an, die Euch am wenigsten aufwendig erscheinen.

Bitte benutzt für die Lösung jeder Aufgabe ein neues Blatt; wir haben Blätter vorrätig, falls Euer Vorrat verbraucht ist.

Schreibt bitte auf jedes von Euch abgegebene Blatt Eueren Namen und Euere Matrikelnummer!

Vergeßt nicht, auf dem Deckblatt anzugeben, ob Ihr die Mafi II Klausur am Montag mitschreibt!

Teil 1: Relationen, Abbildungen, Ordnungen, Äquivalenzrelationen

Aufgabe 1, Thema Relationen (4 Punkte) Sei A die folgende Menge:

$$A = \{3, 4, 5\}$$

und sei die Relation $R \subseteq A \times A$ durch den folgenden Graph definiert:

$$\text{Graph}(R) = \{(3,3), (4,3), (5,5)\}$$

Berechnet die folgenden Relationen und gebt ihren Graph jeweils vollständig in Mengenschreibweise an:

1. **(1 Punkt)** $R_1 = R \circ R$
2. **(1 Punkt)** $R_2 = R^{-1} \circ R^{-1}$
3. **(1 Punkt)** $R_3 = R^{-1} \circ R$
4. **(1 Punkt)** $R_4 = R \circ R^{-1}$

Für die folgenden Aufgaben betrachtet die folgenden Relationen $Q_i \subseteq B \times B$ ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) über der Menge $B = \{x, y, z\}$:

1. $Q_1 = \{(x,x), (y,y)\}$
2. $Q_2 = \{(x,x), (y,y), (z,z), (x,z), (z,x)\}$
3. $Q_3 = \{(x,x), (y,y), (x,z)\}$
4. $Q_4 = \{(x,x), (y,y), (z,x)\}$

Aufgabe 2, Thema Abbildungen (5 Punkte)

1. **(1 Punkt)** Welche der Relationen Q_1-Q_4 sind partielle aber keine totalen Abbidungen?
2. **(1 Punkt)** Welche der Relationen Q_1-Q_4 sind totale Abbildungen?
3. **(1 Punkt)** Welche der Eigenschaften *injektiv, surjektiv, bijektiv* treffen auf die von Euch genanneten partiellen bzw. totalen Abbildungen jeweils zu?
4. **(2 Punkte)** Eine der Relationen aus Q_1-Q_4, nennen wir sie Q_{i_0}, hat die Eigenschaft, daß eine Teilmenge von Q_{i_0} eine bijektive totale Abbildung ist.

   Für welches $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt: $Q_i = Q_{i_0}$? Gebt eine Menge M_0 von Paaren in $B \times B$ an, für die gilt: $Q^* =_{\text{def}} Q_{i_0} \setminus M_0$ ist eine bijektive totale Abbildung.

Aufgabe 3, Thema Ordnungen (4 Punkte)

1. **(1 Punkt)** Welche der Relationen aus Q_1-Q_4 könnt Ihr nicht zu einer partiellen Ordnung vervollständigen, d.h., durch *Hinzufügen* weiterer Paare zu einer partiellen Ordnung machen? Begründet Euere Antwort.

2. **(1.5 Punkte)** Wählt eine Relation aus Q_1-Q_4, nennen wir sie Q_{i_1}, die sich zu einer partiellen, aber nicht totalen Ordnung vervollständigen läßt.

   Gebt eine möglichst kleine Menge $M_1 \subseteq B \times B$ von Paaren an, so daß gilt: $P =_{\text{def}} Q_{i_1} \cup M_1$ ist eine partielle, aber nicht totale Ordnung.

3. **(1.5 Punkte)** Wählt eine andere Relation aus Q_1-Q_4, nennen wir sie Q_{i_2}, die sich zu einer totalen Ordnung vervollständigen läßt.

   Gebt eine Menge $M_2 \subseteq B \times B$ von Paaren an, so daß gilt: $T =_{\text{def}} Q_{i_2} \cup M_2$ ist eine totale Ordnung.

Aufgabe 4, Thema Äquivalenzrelationen (5 Punkte)

1. **(2 Punkte)** Wählt eine totale Abbildung aus Aufgabe 2 aus (entweder eine Relation Q_i für ein $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, die eine totale Abbildung ist (Aufgabe 2.1), oder die totale Abbildung Q^*, die Ihr in Aufgabe 2.4 selbst konstruiert habt).

   Gebt den Kern dieser totalen Abbildung vollständig (d.h. unter Angabe aller Elemente) an.

2. **(1 Punkt)** Gebt alle Äquivalenzklassen an, jeweils mit Angabe aller Elemente in der Klasse.

3. **(1 Punkt)** Gebt die Quotientenmenge der Menge B bzgl. des Kerns an.

   Wieviele Elemente hat die Quotientenmenge?

4. **(1 Punkt)** Für welche zwei Relationen Q_i,Q_j gilt:

$$Q_i = \text{Ker } Q_j$$

   (das setzt natürlich voraus, daß Q_j eine totale Abbildung ist)

Teil 2: Algebren, Terme, Homomorphismen, Termalgebren

Die Aufgaben in diesem Teil der Klausur drehen sich um die folgende Signatur KLAUSIG:

sorts: The, Gi
opns: tion : $\rightarrow$ The
dung : $\rightarrow$ Gi
rela : The $\rightarrow$ Gi
abbil : Gi $\rightarrow$ The

Seien außerdem die folgenden Variablenmengen zur Signatur KLAUSIG gegeben:

$$X_{\mathrm{The}} = \{x\}; \quad X_{\mathrm{Gi}} = \{h, i, j\}$$

Wir geben außerdem die folgenden KLAUSIG-Algebren beispielhaft vor:

KLAUSIG	A	B
The Gi	$A_{\mathrm{The}} = \{l_1, l_2, l_3\}$ $A_{\mathrm{Gi}} = \{m_1, m_2\}$	$B_{\mathrm{The}} = \{K_1, K_2\}$ $B_{\mathrm{Gi}} = \{H_1, H_2, H_3\}$
tion : $\rightarrow$ The dung : $\rightarrow$ Gi rela : The $\rightarrow$ Gi abbil : Gi $\rightarrow$ The	$\mathrm{tion}_A = l_3$ $\mathrm{dung}_A = m_1$ $\mathrm{rela}_A =$ $\{l_1 \mapsto m_1, l_2 \mapsto m_1, l_3 \mapsto m_2\}$ $\mathrm{abbil}_A =$ $\{m_1 \mapsto l_2, m_2 \mapsto l_3\}$	$\mathrm{tion}_B = K_1$ $\mathrm{dung}_B = H_2$ $\mathrm{rela}_B =$ $\{K_1 \mapsto H_1, K_2 \mapsto H_3\}$ $\mathrm{abbil}_B =$ $\{H_1 \mapsto K_2, H_2 \mapsto K_1, H_3 \mapsto K_2\}$

Aufgabe 5, Thema Algebren (3 Punkte) Definiert eine dritte KLAUSIG-Algebra C, deren Trägermengen beide unendlich sind.

Aufgabe 6, Thema Terme (6 Punkte)

1. **(1 Punkt)** Gebt zu jeder Sorte die Menge der Grundterme an.
2. **(0.5 Punkte)** Gebt zu jeder Sorte die Menge der Terme über den oben angegebenen Variablen an.
3. **(0.5 Punkte)** Definiert eine beliebige Variablenbelegung $\sigma : X \rightarrow C$ von den Variablen der Signatur KLAUSIG in die von Euch definierte Algebra.
4. **(1 Punkt)** Gebt zu jeder Sorte jeweils zwei Grundterme und zwei Terme an, die Variablen enthalten. Ihr müßt also insgesamt 8 Terme angeben.

Hinweis für die folgenden beiden Aufgaben:
es reicht, wenn Ihr für je einen Grundterm t_1 und einen Variablenterm t_2 die Auswertungen $eval(C)(t_1)$ und $eass(\sigma)(C)(t_2)$ *ausführlich* aufschreibt, d.h. indem Ihr alle Zwischenschritte der Auswertung aufschreibt, gemäß der rekursiven Definition von *eval* bzw. *eass*. Für die übrigen Auswertungen reicht es, wenn Ihr einfach das Ergebnis angebt.

5. **(1 Punkt)** Wertet die vier Grundterme mit *eval(C)* in der von Euch definierten Algebra aus.

6. **(2 Punkte)** Wertet die sechs variablenhaltigen Terme mit *eass(σ)(C)* bezüglich der von Euch gewählten Variablenbelegung in C aus.

Aufgabe 7, Thema Homomorphismen (5 Punkte) Beweist, daß es keinen Homomorphismus $h : A \to B$ gibt.

Aufgabe 8, Thema Termalgebren (4 Punkte)

1. **(3 Punkte)** Gebt die Termalgebra T_{KLAUSIG} zur Signatur KLAUSIG an.

2. **(1 Punkt)** Gebt eine beliebige KLAUSIG-Algebra D an, die isomorph zur aber nicht gleich der Termalgebra ist. Es reicht die Angabe der Algebra, ein Nachweis der Isomorphie braucht nicht geführt zu werden.