TheGI 2 im SS 1996: Musterlösung der Klausur

Teil 1: Relationen, Abbildungen, Ordnungen, Äquivalenzrelationen

Aufgabe 1, Thema Relationen (x Punkte) Berechnet die folgenden Relationen und gebt ihren Graph jeweils vollständig an:

1. $R_1 = R \circ R$

   $R_1 = R \circ R = R = \{(3,3),(3,4),(5,5)\}$
2. $R_2 = R^{-1} \circ R^{-1}$

   $R_2 = R^{-1} \circ R^{-1} = R^{-1} = \{(4,3),(3,3),(5,5)\}$
3. $R_3 = R^{-1} \circ R$

   $R_3 = R^{-1} \circ R = \{(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,5)\}$
4. $R_4 = R \circ R^{-1}$

   $R_4 = R \circ R^{-1} = \{(3,3),(5,5)\}$

9 MIN - ALLERDINGS HABE ICH SÄMTLICHE RELATIONEN DOPPELT VISUALISIERT!

Aufgabe 2, Thema Abbildungen (x Punkte)

1. Welche der Relationen R_1-R_4 sind partielle aber keine totalen Abbidungen?

   Nur R_4 ist eine partielle Abbildung, die nicht total ist.
2. Welche der Relationen R_1-R_4 sind totale Abbildungen?

   R_1 ist die einzige totale Abbildung.
3. Welche der Eigenschaften *injektiv, surjektiv, bijektiv* treffen auf die partiellen/totalen Abbildungen jeweils zu?

   R_4 ist injektiv, R_1 nicht; keine der beiden Relationen ist surjektiv.
4. Entfernt aus einer der Relationen aus Aufgabe 1, die keine (partiellen) Abbildungen sind, eine minimale Anzahl von Paaren, so daß das Ergebnis eine bijektive, totale Abbildung wird.

   Die einzige Relation, die dafür in Frage kommt, ist R_3, Damit R_3 rechtseindeutig wird, muß man mindestens zwei Paare entfernen, z.B. die Paare $(3,3)$ und $(4,4)$. Das Ergebnis ist die Relation Q:

   $$\text{Graph}(Q) = \{(3,4),(4,3),(5,5)\}$$

   Q ist eine bijektive totale Abbildung.

4 MIN

Aufgabe 3, Thema Ordnungen (x Punkte)

1. Welche der Relationen aus Aufgabe 1 könnt Ihr nicht zu einer partiellen Ordnung vervollständigen, d.h., durch *Hinzufügen* weiterer Paare zu einer partiellen Ordnung machen? Begründet Euere Antwort.

   Eine partielle Ordnung $R \subseteq A \times A$ muß reflexiv und transitiv sein. $A \times A$ ist sowohl reflexiv als auch transitiv, also kann es keine Relation geben, die nicht durch *Hinzufügen* von Elementen diese Eigenschaften erwerben könnte.

   Aber: eine partielle Ordnung muß auch antisymmetrisch sein. R_3 ist nicht antisymmetrisch. Das liegt an der Existenz der beiden folgenden Paare in R_3:

   (a) $(3,4) \in R_3$

   (b) $(4,3) \in R_3$

   Nur, wenn man eines dieser Elemente aus R_3 *entfernt*, wird die Relation wieder antisymmetrisch. Alle anderen Relationen kann man zu partiellen Ordnungen vervollständigen.

2. Bei einer der Relationen aus Aufgabe 1, bei denen dieses möglich ist, fügt eine minimale Anzahl von Paaren zu der Relation hinzu, damit das Ergebnis eine partielle, aber nicht totale Ordnung ist.

   R_4 wird reflexiv, wenn man das Paar $(4,4)$ hinzunimmt. Das Ergebnis, die Relation P, ist antisymmetrisch und transitiv:

   $$P = R_4 \cup \{(4,4)\}$$

   P ist keine totale Ordnung, da z.B. weder $(3,4)$ noch $(4,3)$ Elemente von P sind.

3. Bei einer anderen der Relationen aus Aufgabe 1, bei denen dieses möglich ist, fügt eine minimale Anzahl von Paaren zu der Relation hinzu, damit das Ergebnis eine totale Ordnung ist.

   R_1 wird zu einer totalen Ordnung, wenn wir z.B. die folgenden drei Elemente hinzufügen:

   $$T = R_1 \cup \{(4,4),(5,4),(5,3)\}$$

9 MIN

Aufgabe 4, Thema Äquivalenzrelationen (x Punkte)

1. Wählt eine totale Abbildung aus Aufgabe 2 aus (entweder eine Relation aus Aufgabe 1, die eine totale Abbildung ist, oder die totale Abbildung, die Ihr im letzten Teil von Aufgabe 2 selbst konstruiert habt).

   Gebt den Kern dieser totalen Abbildung vollständig (d.h. unter Angabe aller Elemente der Relation) an.

   Ich wähle $Q = \{(3,4),(4,3),(5,5)\}$:

   $$\mathrm{Ker}(Q) = \{(3,3),(4,4),(5,5)\}$$

2. Gebt alle Äquivalenzklassen an, jeweils mit Angabe aller Elemente in der Klasse.

   $[1] = \{1\}$
   $[2] = \{2\}$
   $[3] = \{3\}$

3. Gebt den Quotienten der Relation an.

   $A \mid_{\mathrm{Ker}(Q)} = \{[1],[2],[3]\}$

4. Für zwei Relationen aus Aufgabe 1 gilt, daß die eine der Kern der anderen ist: für welches Paar gilt dies?

   $R_3 = \mathrm{Ker}(R_1)$

2 MIN

Teil 2: Algebren, Terme, Homomorphismen, Termalgebren

Aufgabe 5: Thema Algebren (x Punkte) Definiert eine weitere KLAUSIG-Algebra C, deren Trägermengen beide unendlich sind.

KLAUSIG	C
The	$C_{\text{The}} = \mathbb{N}$
Gi	$C_{\text{Gi}} = \mathbb{Z}$
$\text{tion} : \to \text{The}$	$\text{tion}_C = 0$
$\text{dung} : \to \text{Gi}$	$\text{dung}_C = -4$
$\text{rela} : \text{The} \to \text{Gi}$	$\text{rela}_C(n) = -n$
$\text{abbil} : \text{Gi} \to \text{The}$	$\text{abbil}_C(z) = \mid z \mid *2$

3 MIN

Thema 6: Terme (x Punkte)

1. Gebt zu jeder Sorte sämtliche Grundterme an.

$$
\begin{aligned}
T_{\text{KLAUSIG},\text{The}} &= \{\text{tion}\} \\
&\cup \{\text{abbil}(t) \mid t \in T_{\text{KLAUSIG},\text{Gi}}\} \\
T_{\text{KLAUSIG},\text{Gi}} &= \{\text{dung}\} \\
&\cup \{\text{rela}(t) \mid t \in T_{\text{KLAUSIG},\text{The}}\}
\end{aligned}
$$

2. Gebt zu jeder Sorte sämtliche Terme über den oben angegebenen Variablen an.

$$
\begin{aligned}
T_{\text{KLAUSIG},\text{The}}(X) &= \{s, t, \text{tion}\} \\
&\cup \{\text{abbil}(t) \mid t \in T_{\text{KLAUSIG},\text{Gi}}(X)\} \\
T_{\text{KLAUSIG},\text{Gi}}(X) &= \{g, h, \text{dung}\} \\
&\cup \{\text{rela}(t) \mid t \in T_{\text{KLAUSIG},\text{The}}(X)\}
\end{aligned}
$$

3. Definiert eine beliebige Variablenbelegung $\sigma : X \to C$ von den Variablen der Signatur KLAUSIG in die von Euch definierte Algebra.

   $\sigma : X \to C$
   $\sigma_{\text{The}} : X_{\text{The}} \to C_{\text{The}}$
   $\sigma_{\text{The}} : \{s, t\} \to \mathbb{N};\quad s \mapsto 4, t \mapsto 12$
   $\sigma_{\text{Gi}} : X_{\text{Gi}} \to C_{\text{Gi}}$
   $\sigma_{\text{Gi}} : \{g, h\} \to \mathbb{Z};\quad g \mapsto -11, h \mapsto 0$

4. Gebt zu jeder Sorte jeweils drei Grundterme und drei Terme, die Variablen enthalten, an. Das müssen also insgesamt 12 Terme werden.

	Grundterme	Variablenterme
Gi	dung rela(tion) rela(abbil(dung))	g h rela(abbil(g))
The	tion abbil(dung) abbil(rela(tion))	s t abbil(h)

5. Wertet die sechs Grundterme mit *eval(C)* in der von Euch definierten Algebra aus.

$\text{eval}(C)_{\text{Gi}}(\text{dung}) = -4$
$\text{eval}(C)_{\text{Gi}}(\text{rela}(\text{tion})) = 0$
$\text{eval}(C)_{\text{Gi}}(\text{rela}(\text{abbil}(\text{dung}))) = -8$
$\text{eval}(C)_{\text{The}}(\text{tion}) = 0$
$\text{eval}(C)_{\text{The}}(\text{abbil}(\text{dung})) = 8$
$\text{eval}(C)_{\text{The}}(\text{abbil}(\text{rela}(\text{tion})))$
$= \text{abbil}_C(\text{eval}(C)_{\text{Gi}}(\text{rela}(\text{tion})))$
$= \text{abbil}_C(\text{rela}_C(\text{eval}(C)_{\text{The}}(\text{tion})))$
$= \text{abbil}_C(\text{rela}_C(\text{tion}_C))$
$= \text{abbil}_C(\text{rela}_C(0))$
$= \text{abbil}_C(-0)$
$=| 0 | *2$
$= 0$

6. Wertet die sechs variablenhaltigen Terme mit *eass(C)(σ)* bezüglich der von Euch gewählten Variablenbelegung in C aus.

$\text{eass}(C)(\sigma)_{\text{Gi}}(g) = \sigma_{\text{Gi}}(g) = -11$
$\text{eass}(C)(\sigma)_{\text{Gi}}(h) = \sigma_{\text{Gi}}(h) = 0$
$\text{eass}(C)(\sigma)_{\text{Gi}}(\text{rela}(\text{abbil}(g))) = -22$
$\text{eass}(C)(\sigma)_{\text{The}}(s) = \sigma_{\text{The}}(s) = 4$
$\text{eass}(C)(\sigma)_{\text{The}}(abbil(h))$
$= \text{abbil}_C(\text{eass}(C)(\sigma)_{\text{Gi}}(h))$
$= \text{abbil}_C(\sigma_{Gi}(h))$
$= \text{abbil}_C(0)$
$= 0$

16 MIN

Thema 7: Homomorphismen (x Punkte) Beweist, daß es keinen Homomorphismus $h : A \to B$ gibt.

Ein Homomorphismus $h : A \to B$ muß sämtliche Grundterme bewahren, also muß für jeden Grundterm t einer beliebigen Sorte s der Signatur gelten:

$$h_s(eval(A)_s(t)) = \text{eval}(B)_s(t)$$

Um dieses Argument anwenden zu können, werten wir zunächst einige Terme der Signatur in den Algebren A bzw. B aus:

Grundterme	eval(A)	eval(B)
dung	m_1	H_2
rela(tion)	m_2	H_1
rela(abbil(dung))	m_1	H_1
tion	l_3	K_1
abbil(dung)	l_2	K_1

Man sieht an dieser Tabelle, daß die Abbildung h_{Gi} des Homomorphismusses $h : A \to B$ das Element m_1 sowohl auf H_2 als auch auf H_1 abbilden müßte. Das wäre jedoch keine Abbildung, also kann es einen solchen Homomorphismus nicht geben.

Formal aufgeschrieben: setzten wir für t in der obigen Gleichung zunächst den Term dung ein, so erhalten wir:

$$h_{\mathrm{Gi}}(eval(A)_{\mathrm{Gi}}(\mathrm{dung})) = \mathrm{eval}(B)_{\mathrm{Gi}}(\mathrm{dung})$$
$$\Leftrightarrow h_{\mathrm{Gi}}(m_1) = H_2$$

Setzten wir dann den Term rela(abbil(dung)) für t ein, erhalten wir:

$$h_{\mathrm{Gi}}(eval(A)_{\mathrm{Gi}}(\mathrm{rela(abbil(dung))})) = \mathrm{eval}(B)_{\mathrm{Gi}}(\mathrm{rela(abbil(dung))})$$
$$\Leftrightarrow h_{\mathrm{Gi}}(m_1) = H_1$$

und damit den Widerspruch zur Annahme, h sei ein Homomorphismus.

6 MIN

Thema 8: Termalgebren (x Punkte)

1. Gebt die Termalgebra T_{KLAUSIG} zur Signatur KLAUSIG an.

KLAUSIG	T_{KLAUSIG}
The	$T_{\text{KLAUSIG},\text{The}}$
Gi	$T_{\text{KLAUSIG},\text{Gi}}$
tion : $\to$ The	$\mathrm{tion}_{T_{\text{KLAUSIG}}} = \mathrm{tion}$
dung : $\to$ Gi	$\mathrm{dung}_{T_{\text{KLAUSIG}}} = \mathrm{dung}$
rela : The $\to$ Gi	$\mathrm{rela}_{T_{\text{KLAUSIG}}}(t) = \mathrm{rela}(t)$
abbil : Gi $\to$ The	$\mathrm{abbil}_{T_{\text{KLAUSIG}}}(t) = \mathrm{abbil}(t)$

2. Gebt eine beliebige KLAUSIG-Algebra D an, die isomorph zur Termalgebra ist. Es reicht die Angabe der Algebra, ein Nachweis der Isomorphie braucht nicht geführt zu werden.

Eine zu T_{KLAUSIG} isomorphe Algebra erhalten wir am einfachsten, indem wir die Elemente der Trägermengen umbenennen und die Operationen entsprechend angleichen. Die einfachste Form der Beschreibung einer solchen Algebra ist über eine Signatur, deren Komponenten denen von KLAUSIG 1:1 entsprechen. Die Termalgebra dieser Signatur, nennen wir sie Σ_D, ist dann die gewünschte Algebra D:

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{sorts:} & s_1,\ s_2 \\
\textbf{opns:} & c_1 : \to s_1 \\
 & c_2 : \to s_2 \\
 & f_1 : s_1 \to s_2 \\
 & f_2 : s_2 \to s_1
\end{array}
$$

2 MIN