SS 97

H. Ehrig
R. Bardohl

TheGI 2

3. 7. 1997

KLAUSUR

Name : ....
Vorname : ....
Matrikelnummer : ....

Wird die MafI 2-Klausur mitgeschrieben? Ja: Nein:

Fachrichtung: Informatik................................ andere:.............................
Prüfungsordnung: StuPO90/neu............................ andere:.............................
Prüf.rel.Stud.leistg...................... Teilnahmeschein:.................

- Die Klausur dauert 120 Minuten.
- Bitte zuerst Name, Vorname und Matrikelnummer oben eintragen.
- Nicht mit Bleistift schreiben.
- Bitte für jede Aufgabe **ein neues Blatt** anfangen (wir haben noch Blätter für Euch!).
  Schreibt bitte auf jedes von Euch abgegebene Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer!
- Bei der Klausur sind 36 Punkte erreichbar, 18 in jedem der beiden Teile.
  Wer 18 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden.
- Bitte Personalausweis oder Paß und Studentenausweis bereithalten.
- Bitte den Laufzettel bereithalten.

Thema	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8	A 9	A 10	Σ	Note
Punkte	3	4	5	3	3	3	4	5	2	4	36	
erreicht												

3.7.97

Teil 1: Mengen, Relationen, Abbildungen, Ordnungen, Äquivalenzrelationen

Aufgabe 1, Thema Mengen (3 Punkte)

1. **(2 Punkte)** Sei $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{a, b, c\}$, $A_3 = \{b, c, d, e\}$.
   Gebt folgende Mengen genau an:
   (a) $A_1 \times A_2$
   (b) $\mathcal{P}(A_1) \times \emptyset$
   (c) $\{x, y, z\} \cup \mathcal{P}(A_1)$
   (d) $\bigcap_{i \in \{1,2,3\}} A_i$

2. **(1 Punkt)** Zeigt durch einen formalen Beweis die Gültigkeit folgender Aussage:

$$(A \times B) \backslash (C \times D) = ((A \backslash C) \times B) \cup (A \times (B \backslash D))$$

   Hinweis: Es gilt folgende Äquivalenz:

$$(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge d) \equiv (a \wedge b \wedge (c \vee d))$$

Aufgabe 2, Thema Relationen (4 Punkte)

1. **(2 Punkte)** Gebt beliebige Mengen A, B, C und zwei Graphen der Relationen $R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$ so an, daß gilt:
   (a) Die Relation R_1 ist linkstotal, aber weder rechtstotal noch links- noch rechtseindeutig.
   (b) Die Relation R_2 ist rechtseindeutig, aber weder linkseindeutig noch links- noch rechtstotal.

   Zusätzlich zu der Angabe der Mengen und der Graphen der Relationen sollen beide Relationen visualisiert werden.

2. **(2 Punkte)**
   (a) Berechnet $R_2 \circ R_1$ und visualisiert das Ergebnis.
   (b) Welche der Eigenschaften *linkstotal, rechtseindeutig, rechtstotal, linkseindeutig* treffen auf $R_2 \circ R_1$ zu?

Aufgabe 3, Thema Abbildungen (5 Punkte)

In dieser Aufgabe sei die Menge $A = \{5, \bigcirc, y, \Delta\}$ und die Menge $B = \{a, b, c\}$. Außerdem seien die Relationen S_i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) vom Typ $A \times B$ wie folgt gegeben:

$$S_1 = \{(5, a), (\bigcirc, b), (y, b), (\Delta, c)\}$$
$$S_2 = \{(5, a), (\bigcirc, a), (y, b)\}$$
$$S_3 = \{(5, a), (y, a)\}$$
$$S_4 = \{(5, a), (5, b), (\bigcirc, a), (\bigcirc, b), (y, c), (\Delta, c)\}$$

1. **(1 Punkt)** Welche der Relationen S_1-S_4 sind totale Abbildungen?
2. **(1 Punkt)** Welche der Relationen S_1-S_4 sind partielle aber keine totalen Abbildungen?
3. **(1 Punkt)** Welche der Eigenschaften *injektiv, surjektiv, bijektiv* treffen auf die von Euch genannten partiellen bzw. totalen Abbildungen jeweils zu?
4. **(2 Punkte)** Gebt eine Relation aus S_1-S_4 an, die keine (partielle oder totale) Abbildung ist, und nennt sie R.
   (a) Gebt eine Teilmenge R_1 von R an, die eine totale nicht-surjektive Abbildung ist.
   (b) Gebt eine Teilmenge R_2 von R an, die eine injektive und surjektive partielle Abildung ist.

Aufgabe 4, Thema Ordnungen (3 Punkte)

Betrachtet die folgenden als Diagramme dargestellten Relationen vom Typ $A \times A$, mit $A = \{a, b, c\}$:

R_1:
$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop left] \arrow[r] & b & c \arrow[l] \end{tikzcd}$$

R_2:
$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop left] \arrow[r, shift left] & b \arrow[l, shift left] \arrow[loop right] & c \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

R_3:
$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop left] \arrow[r] & b \arrow[loop right] & c \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

R_4:
$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop left] \arrow[r] & b \arrow[loop below] \arrow[r] & c \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

1. **(1 Punkt)** Welche der Relationen R_1-R_4 sind partielle Ordnungen? Begründet kurz für alle anderen Relationen, warum sie keine partiellen Ordnungen sind.
2. **(1 Punkt)** Welche der vier Relationen, die keine partiellen Ordnungen sind, könnt Ihr zu einer partiellen Ordnung vervollständigen, d.h. durch Hinzufügen weiterer Paare in die Relation zu einer partiellen Ordnungen machen?

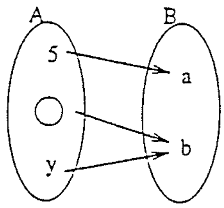
   Gebt für eine solche Relation an, welche Paare man dieser Relation hinzufügen muß, um eine partielle Ordnung zu erhalten.
3. **(1 Punkt)** Gibt es unter den vier Relationen eine totale Ordnung? Wenn ja, gebt an, welche es ist.

   Wenn nein, wählt eine der Relationen aus, die sich zu einer totalen Ordnung vervollständigen läßt und gebt die Paare an, welche man hinzufügen muß, um eine totale Ordnung zu erhalten.

7+

Aufgabe 5, Thema Äquivalenzrelationen (3 Punkte)

1. (1 Punkt) Gegeben sei eine totale Abbildung $f : A \to B$, die wie folgt visualisiert ist:



   Gebt den Kern dieser Abbildung an, indem Ihr sowohl den Typ als auch den Graph der Relation angebt.

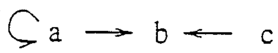
2. (1 Punkt)

   a) Gebt alle Äquivalenzklassen an, jeweils mit Angabe aller Elemente der Klasse.

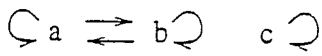
   b) Gebt den Quotienten der Menge A bzgl. des Kerns an. Wieviele Elemente hat der Quotient?

3. (1 Punkt) Welche der folgenden Relationen R_1-R_4 sind Äquivalenzrelationen?

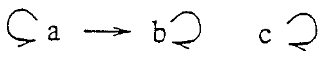
R_1:



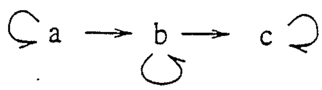
R_2:



R_3:



R_4:



Teil 2: Algebren, Terme, Homomorphismen, Termalgebren, strukturelle Induktion

Die Aufgaben in diesem Teil der Klausur drehen sich um die folgende Signatur Σ, für die wir die Algebren A und B beispielhaft vorgeben:

Σ	A	B
P Q	$A_P = \{T, F\}$ $A_Q = \{\lambda, 0, 1, 01\}$	$B_P = \{r, s, t\}$ $B_Q = \{0, 1, 2, 3\}$
$a : \to P$ $b : \to Q$ $f : Q \to Q$	$a_A = T$ $b_A = \lambda$ $f_A : A_Q \to A_Q;$ $\lambda \longmapsto 0$ $0 \longmapsto 1$ $1 \longmapsto 01$ $01 \longmapsto 01$	$a_B = s$ $b_B = 0$ $f_B : B_Q \to B_Q;$ $0 \longmapsto 1$ $1 \longmapsto 2$ $2 \longmapsto 3$ $3 \longmapsto 3$
$g : Q \to P$	$g_A : A_Q \to A_P;$ $\lambda \longmapsto T$ $0 \longmapsto T$ $1 \longmapsto F$ $01 \longmapsto T$	$g_B : B_Q \to B_P;$ $0 \longmapsto s$ $1 \longmapsto s$ $2 \longmapsto r$ $3 \longmapsto s$

Seien außerdem die folgenden Variablenmengen zur Signatur Σ gegeben:

$$X_P = \{x\}; \quad X_Q = \{y, z\}$$

Aufgabe 6, Thema Algebren (3 Punkte)

Definiert eine dritte Σ-Algebra C, deren Trägermenge für Q unendlich ist.

(Hinweis zur Bewertung: Die volle Punktzahl gibt es nur für die richtige und vollständige Angabe einer Algebra.)

Aufgabe 7, Thema Terme (4 Punkte)

1. **(1 Punkt)** Gebt zu jeder Sorte die Menge der Grundterme genau an, d.h. ohne Verwendung der *Pünktchenschreibweise*.
2. **(1 Punkt)** Gebt zu jeder Sorte die Menge der Terme über den oben angegebenen Variablen genau an, d.h. ohne Verwendung der *Pünktchenschreibweise*.

Hinweis für die folgenden beiden Aufgaben: Es sind alle Zwischenschritte der Auswertung gemäß der rekursiven Definitionen von *eval* und *xeval* aufzuschreiben.

3. **(1 Punkt)** Wertet den folgenden Grundterm mit *eval(C)* in der von Euch in Aufgabe 6 definierten Algebra aus:

$$g(f(b))$$

4. **(1 Punkte)** Definiert eine beliebige Variablenbelegung $ass : X \to C$ von den Variablen der Signatur Σ in die von Euch in Aufgabe 6 definierte Algebra. Wertet dann den folgenden Term mit *xeval(C)(ass)* bezüglich der von Euch gewählten Variablenbelegung in C aus:

$$g(f(f(y)))$$

Aufgabe 8, Thema Homomorphismen (5 Punkte)

Beweist, daß es einen Homomorphismus $h : A \to B$ gibt.

Dazu müßt Ihr einen Homomorphismus auf den Trägermengen definieren und nachweisen, daß die Homomorphismuseigenschaften gelten.

Aufgabe 9, Thema Termalgebren (2 Punkte)

1. **(1 Punkt)** Gebt die Termalgebra T_Σ zur Signatur Σ auf Seite 6 an.
2. **(1 Punkt)** Unter welcher Einschränkung der Signatur sind die Trägermengen $T_{\Sigma,s}$ leer ?

Aufgabe 10, Thema Strukturelle Induktion (4 Punkte)

Gegeben sei folgende Signatur:

Σ			A		
sorts:	nat		A_{nat}	$=$	$\mathbb{N}$
opns:	zero	$: \to \mathrm{nat}$	zero_A	$=$	1
	succ	$: \mathrm{nat} \to \mathrm{nat}$	$\mathrm{succ}_A(a)$	$=$	$a \dotplus 3$
	mal	$: \mathrm{nat}\,\mathrm{nat} \to \mathrm{nat}$	$\mathrm{mal}_A(a, b)$	$=$	$a \cdot b$
vars:	x	$: \mathrm{nat}$	$ass_{\mathrm{nat}}(x)$	$=$	7

(4 Punkte) Zeigt durch strukturelle Induktion: $\forall t \in T_\Sigma(X)$ gilt:

$$xeval(A)(ass)(t) \bmod 3 = 1$$

Hilfestellung:

1. Ihr dürft die Termauswertung abkürzen, z.B.:

$$eva := xeval(A)(ass)_{\mathrm{nat}}$$

2. Ihr könnt in dem Beweis verwenden:

$$\begin{array}{rrcl}
(i) & 1 \bmod 3 & = & 1 \\
(ii) & 7 \bmod 3 & = & 1 \\
(iii) & (a \dotplus 3) \bmod 3 & = & a \bmod 3 \\
(iv) & (a \cdot b) \bmod 3 & = & (a \bmod 3 \cdot b \bmod 3) \bmod 3
\end{array}$$