TheGI 2 im SS 1998: Klausur am 16. Juli 1998

Bei der Klausur sind 60 Punkte erreichbar, 30 in jedem der beiden Teile. Wer 30 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Mit der Bearbeitung der Zusatzaufgabe (4 Punkte) können nicht erreichte Punkte bei den regulären Klausuraufgaben ausgeglichen werden.

Lest Euch auf jeden Fall zuerst alle Aufgaben in Ruhe durch und fangt dann mit der Bearbeitung derjenigen Aufgaben an, die Euch am wenigsten aufwendig erscheinen.

Bitte benutzt für die Lösung jeder Aufgabe ein neues Blatt; wir haben Blätter vorrätig, falls Euer Vorrat verbraucht ist.

Schreibt bitte auf jedes von Euch abgegebene Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer!

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte	6	13	6	5	16	14	60

Teil 1: Mengen, Relationen, Abbildungen, Ordnungen, Äquivalenzrelationen

Aufgabe 1, Thema Mengen (6 Punkte)

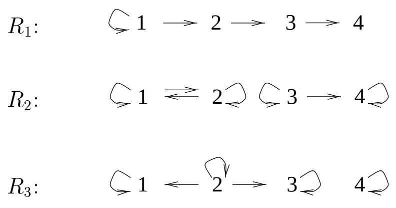
1. **(4 Punkte)** Sei $A_1 = \{4, 3, 2, 6, 5\}$, $A_2 = \{3, 5, 1\}$, $A_3 = \{1, 2, 3\}$.
   Gebt folgende Mengen genau an:
   (a) $A_2 \times A_3$
   (b) $\mathcal{P}(A_2)$
   (c) $A_1 \times \emptyset$
   (d) $\bigcap_{i \in \{1,2,3\}} A_i$

2. **(2 Punkte)** Zeigt durch einen formalen Beweis die Gültigkeit folgender Aussage:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Aufgabe 2, Thema Relationen (13 Punkte)

Betrachtet die folgenden als Diagramme dargestellten Relationen vom Typ $A \times A$ mit $A = \{1, 2, 3, 4\}$:



Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(3 Punkte)** Gebt für alle Relationen den entsprechenden Graph, d.h., die entsprechende Teilmenge von $A \times A$ an.

2. **(3 Punkte)** Berechnet $R_1 \circ R_1$, $R_3 \circ R_1$ und $R_1 \circ R_3$.

3. **(3 Punkte)** Welche der Relationen R_1 - R_3 sind partielle Ordnungen ?
   Begründet für alle anderen, warum sie keine partiellen Ordnungen sind.

4. **(1 Punkt)** Welche der drei Relationen, die keine partielle Ordnung sind, könnt Ihr zu einer partiellen Ordnung vervollständigen, d.h., durch Hinzufügen weiterer Paare zu einer partiellen Ordnung machen ?
   Gebt für eine solche Relation an, welche Paare man dieser Relation hinzufügen muß, um eine partielle Ordnung zu erhalten.

5. **(3 Punkte)** Gebt für jede der Relationen R_1 - R_3 die jeweils erzeugte Äquivalenzrelation in A an, d.h., den reflexiv-symmetrisch-transitiven Abschluß. Ihr könnt dabei die diagrammatische Darstellung benutzen.

Aufgabe 3, Thema Abbildungen (6 Punkte)

Gegeben seien folgende Abbildungen zwischen natürlichen bzw. reellen Zahlen :

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ mit } f(n) = 2n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } g(x) = -x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } h(x) = x^2 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(3 Punkte)** Welche der Eigenschaften injektiv, surjektiv, bijektiv treffen auf die drei Abbildungen zu ?

2. **(3 Punkte)**

   (a) Beweist bzw. widerlegt, daß $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv ist.
   (b) Beweist bzw. widerlegt, daß $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv ist.
   (c) Beweist bzw. widerlegt, daß $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv ist.

Aufgabe 4, Thema Quotienten (5 Punkte)

Die Abbildung $f : A \to B$ zwischen den Mengen $A = \{0, 1, 2, 3\}$ und $B = \{1, -1\}$ sei wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ gerade,} \\ -1 & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(2 Punkte)** Gebt den Kern $Ker(f)$ dieser Abbildung an, indem Ihr sowohl den Typ als auch den Graph der Relation angebt.

2. **(2 Punkte)**
   a) Gebt für $Ker(f)$ alle Äquivalenzklassen an, jeweils mit Angabe aller Elemente der Klasse.
   b) Gebt die Quotientenmenge $A_{/Ker(f)}$ an.
   Wieviele Elemente hat $A_{/Ker(f)}$?

3. **(1 Punkt)** Definiert eine Abbildung $g : B \to A$, so daß $f \circ g = id_B$ gilt.

Teil 2: Signatur, Spezifikation Algebren, Terme, Homomorphismen

Aufgabe 5, Thema Algebren, Homomorphismen (16 Punkte)

Gegeben sei die folgende Signatur:

$$\begin{array}{lll} \Sigma = & \textbf{sorts} & \text{Zahl, Bool} \\ & \textbf{opns} & \text{f:} \quad \to \text{Bool} \\ & & \text{e:} \quad \to \text{Zahl} \\ & & \text{q:} \quad \text{Zahl} \to \text{Bool} \\ & & \text{b:} \quad \text{Zahl Zahl} \to \text{Zahl} \end{array}$$

Desweiteren seien zwei Σ-Algebren A und B wie folgt definiert:

A	B
$A_{Zahl} = \mathbb{N}$ $A_{Bool} = \{T, F\}$	$B_{Zahl} = \{1, -1\}$ $B_{Bool} = \{P\}$
$f_A = F$ $e_A = 0$ $q_A : A_{Zahl} \to A_{Bool}$; $q_A(n) = \begin{cases} T & : \text{falls } n \text{ gerade,} \\ F & : \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$ für alle $n \in A_{Zahl}$ $b_A : A_{Zahl} \times A_{Zahl} \to A_{Zahl}$; $b_A(n, m) = n + m$, für alle $(n, m) \in A_{Zahl} \times A_{Zahl}$	$f_B = P$ $e_B = 1$ $q_B : B_{Zahl} \to B_{Bool}$; $q_B(1) = q_B(-1) = P$ $b_B : B_{Zahl} \times B_{Zahl} \to B_{Zahl}$; $b_B(1, 1) = b_B(-1, -1) = 1$ $b_B(1, -1) = b_B(-1, 1) = -1$

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(4 Punkte)** Gebt zwei echte Σ-Unteralgebren von A an.

2. **(8 Punkte)** Gebt einen Σ-Homomorphismus $h : A \to B$ an.
   Beweist die Homomorphieeigenschaft.

3. **(4 Punkte)** Beweist, daß es keinen Σ-Homomorphismus $g : B \to A$ gibt.

Aufgabe 6, Thema Spezifikation, Termauswertung (14 Punkte)

Gegeben sei die folgende Signatur:

$$\Sigma = \begin{array}{lll} \textbf{sorts} & \text{Data, Coll, Test} & \\ \textbf{opns} & \text{c:} & \to \text{Data} \\ & \text{nil:} & \to \text{Coll} \\ & \text{add:} & \text{Data Coll} \to \text{Coll} \\ & \text{test:} & \text{Data Coll} \to \text{Test} \end{array}$$

sowie folgende Σ-Algebra A:

- $A_{Data} = \{0, 1\}$
- $A_{Coll} = \{0, 1\}^*$
- $A_{Test} = \mathbb{N}$
- $c_A = 0$
- $nil_A = \lambda$
- $add_A(x, w) = xw$, für alle $(x, w) \in A_{Data} \times A_{Coll}$
- $test_A(x, w) =$ Anzahl der Buchstaben x im Wort w, für alle $(x, w) \in A_{Data} \times A_{Coll}$

  z.B.: $test_A(0, 10010) = 3$
  $test_A(1, 10010) = 2$

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(2 Punkte)** Gebt jeweils drei Grundterme zu den Sorten Coll und Test an.

2. **(2 Punkte)** Wertet die beiden Grundterme

   $add(c, nil)$ und
   $test(c, add(c, nil))$

   schrittweise in der Σ-Algebra A gemäß der Definition von $eval(A)$ aus.

3. **(2 Punkte)** Wir betrachten das Variablensystem X mit
   $X_{Data} = \{x, y\}$,
   $X_{Coll} = \{k\}$ und
   $X_{Test} = \emptyset$.

   Definiert eine beliebige Variablenbelegung $ass : X \to A$ und wertet schrittweise den folgenden Term bezüglich dieser Variablenbelegung gemäß der Definition von $xeval(A)(ass)$ aus:

   $$test(x, add(y, k)).$$

   Hinweis: Ihr dürft die Termauswertung abkürzen, z.B.

   $$\begin{array}{rcl} eva_{Coll} & := & xeval(A)(ass)_{\text{Coll}} \\ eva_{Data} & := & xeval(A)(ass)_{\text{Data}} \end{array}$$

4. **(4 Punkte)** Gebt an, ob folgende Σ-Gleichungen über X in der Σ-Algebra A erfüllt sind. Falls die jeweilige Gleichung in A nicht erfüllt ist, zeigt dies.
   Ein Beweis über die Gültigkeit einer Gleichung muß nicht erbracht werden.

   (e1) $add(x, add(y, k)) = add(y, add(x, k))$
   (e2) $test(x, add(x, add(y, k))) = test(x, add(y, add(x, k)))$
   (e3) $test(x, add(x, add(x, k))) = test(x, add(x, k))$

5. **(4 Punkte)** Wir betrachten die Spezifikation $SPEC = (\Sigma, E)$ mit $E = \{e3\}$.
   Gebt die Quotiententermalgebra T_{SPEC} explizit an, oder eine zu T_{SPEC} isomorphe Σ-Algebra B.

   Hinweis: Die Isomorphie muß nicht bewiesen werden.

Zusatzaufgabe, Thema Quotiententermalgebra (4 Punkte)

Gegeben sei die folgende Signatur:

$$\Sigma = \begin{array}{ll} \textbf{sorts} & \text{Data, Coll} \\ \textbf{opns} & \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{k}_3, \mathrm{k}_4\colon \to \text{Data} \\ & \mathrm{e}\colon \to \text{Coll} \\ & \mathrm{i}\colon \text{Data} \to \text{Coll} \\ & \mathrm{u}\colon \text{Coll Coll} \to \text{Coll} \end{array}$$

Gebt nun eine Menge E von Σ-Gleichungen derart an, daß die Quotiententermalgebra T_{SPEC} mit $SPEC = (\Sigma, E)$ isomorph zu folgender Σ-Algebra P ist:

- $P_{Data} = \{a, b, c, d\}$
- $P_{Coll} = \mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$ mit
- $\mathrm{k}_{1,P} = a$, $\mathrm{k}_{2,P} = b$, $\mathrm{k}_{3,P} = c$, $\mathrm{k}_{4,P} = d$
- $\mathrm{e}_P = \emptyset$
- $i_P(x) = \{x\}$ für alle $x \in P_{Data}$
- $u_P(M_1, M_2) = M_1 \cup M_2$ für alle $M_1, M_2 \in P_{Coll}$

Hinweis: Ihr müßt weder T_{SPEC} beschreiben, noch den Isomorphismus angeben.