TheGI 2 im SS 1999: Klausur am 15. Juli 1999

Bei der Klausur sind 56 Punkte erreichbar, 28 in jedem der beiden Teile. Wer 28 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Mit der Bearbeitung der Zusatzaufgabe (8 Punkte) können nicht erreichte Punkte bei den regulären Klausuraufgaben ausgeglichen werden. Da diese Aufgaben vom Schwierigkeitsgrad etwas höher sind, bearbeitet sie erst zum Schluß.

Lest Euch auf jeden Fall zuerst alle Aufgaben in Ruhe durch und fangt dann mit der Bearbeitung derjenigen Aufgaben an, die Euch am wenigsten aufwendig erscheinen.

Bitte benutzt für die Lösung jeder Aufgabe ein neues Blatt; wir haben Blätter vorrätig, falls Euer Vorrat verbraucht ist.

Schreibt bitte auf jedes von Euch abgegebene Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer!

Name:

Vormane:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Z	Σ
Punkte	6	4	10	8	13	15	8	56 (+8)

Punkteverteilung(**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Z	Σ	Note
Punkte									

Teil 1: Mengen, Relationen, Abbildungen, Ordnungen, Äquivalenzrelationen

Aufgabe 1, Mengen (6 Punkte)

1. **(3 Punkte)** Sei $A_1 = \{\emptyset, \{1\}\}$, $A_2 = \{a\}$, $A_3 = \{a, b, 1\}$.
   Gebt folgende Mengen elementweise an:
   (a) $A_1 \times A_2$
   (b) $\mathcal{P}(A_1)$
   (c) $\bigcup_{i \in \{1,2,3\}} A_i$

2. **(3 Punkte)** Beweist oder widerlegt die folgenden Aussagen:
   (a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
   (b) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

Aufgabe 2, Relationen (4 Punkte)

Sei A die folgende Menge:

$$A = \{e, f, g, h\}$$

und sei die Relation R vom Typ $A \times A$ durch den folgenden Graph definiert:

$$Graph(R) = \{(e, f), (f, f), (g, h)\}$$

Berechnet die folgenden Relationen und gebt die jeweiligen Graphen vollständig in Mengenschreibweise an:

1. **(1 Punkt)** $R_1 = R \circ R$

2. **(1 Punkt)** $R_2 = R^{-1} \circ R$

3. **(1 Punkt)** $R_3 = R \circ R^{-1}$

4. **(1 Punkt)** $R_4 = R^{-1} \circ R^{-1}$

Aufgabe 3, Abbildungen (10 Punkte)

Sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{a, b, c\}$.

Betrachtet für die folgenden Aufgaben die folgenden Relationen R_i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) vom Typ $A \times B$:

1. $R_1 = \{(1, a), (3, c)\}$

2. $R_2 = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, c), (5, c)\}$

3. $R_3 = \{(1, b), (1, c), (2, c), (3, b), (5, b)\}$

4. $R_4 = \{(1, a), (3, c), (4, b), (5, a)\}$

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(2 Punkte)** Welche der Relationen sind keine partiellen Abbildungen? Beweist, daß sie keine partiellen Abbildungen sind.

2. **(1 Punkt)** Welche der Relationen ist eine totale Abbildung?

Sei $f : A \to B$ die totale Abbildung mit dem Graphen $\{(1, c), (2, a), (3, c), (4, a), (5, c)\}$.

3) **(4 Punkte)** Welche der Eigenschaften injektiv, surjektiv und/oder bijektiv treffen auf f zu? Beweist oder wiederlegt die Eigenschaften.

4) **(1 Punkt)** Berechnet den Kern $Ker(f)$. (Der Graph braucht nur visualisiert angegeben zu werden.)

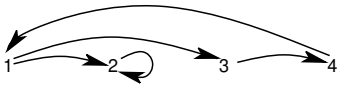
5) **(1 Punkt)** Gebt für $Ker(f)$ alle Äquivalenzklassen elementweise an.

6) **(1 Punkt)** Gebt die Quotientenmenge $A|_{Ker(f)}$ und ein zugehöriges Repräsentantensystem an.

Aufgabe 4, Ordnungen und Äquivalenzrelationen (8 Punkte)

Betrachtet die folgenden als Diagramme dargestellten Relationen vom Typ $A \times A$ mit $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

R_1:



R_2:

R_3:

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(1 Punkt)** Welche der Relationen sind partielle Ordnungen?
2. **(2 Punkt)** Welche Relationen lassen sich nicht zu einer partiellen Ordnung erweitern? Beweist, daß sie sich nicht erweitern lassen.
3. **(3 Punkte)** Eine der Relationen, die keine partielle Ordnung ist, läßt sich zu einer partiellen Ordnung O_p erweitern.
   - **(a)** Ergänzt die hierfür notwendigen Pfeile in der obigen Skizze. (Notwendig soll heißen, fügt so wenig Pfeile wie möglich hinzu.)
   - **(b)** Gebt eine Erweiterung der partiellen Ordnung O_p zu einer totalen Ordnung O_t über dem Alphabet A an. (Die visuelle Darstellung des Graphen reicht aus, aber nutzt bitte für die Darstellung von O_t eine gesonderte Skizze!)
   - **(c)** Ordnet die Wörter:

     λ, 12, 23 und 134

     aus A^* nach der lexikographischen Ordnung $\leq_{O_t}$ bezüglich O_t.
4. **(2 Punkte)**
   - **(a)** Welche der Relationen können zu einer Äquivalenzrelation erweitert werden?
   - **(b)** Erweitert eine der Relationen zu einer Äquivalenzrelation. (Die visuelle Darstellung des Graphen reicht aus.)

Teil 2: Signatur, Spezifikation, Algebren, Terme, Homomorphismen

Aufgabe 5, Algebren, Homomorphismen (13 Punkte)

Gegeben sei die folgende Signatur:

$\Sigma =$ **sorts** n, j
opns z: $\rightarrow$ n
s: n $\rightarrow$ n
m: n n $\rightarrow$ n

Desweiteren seien zwei Σ-Algebren A und B wie folgt definiert:

A	B
$A_n = \mathbb{N}$ $A_j = \mathbb{Z}$	$B_n = \{T, F\}$ $B_j = \{w, f\}$
$z_A = 0$	$z_B = F$
$s_A : A_n \rightarrow A_n;$ $s_A(x) = x + 1$	$s_B : B_n \rightarrow B_n;$ $s_B(F) = T$ $s_B(T) = F$
$m_A : A_n \times A_n \rightarrow A_n;$ $m_A(x, y) = x \cdot y$	$m_B : B_n \times B_n \rightarrow B_n;$ $m_B(T, T) = T$ $m_B(F, F) = m_B(F,T) = m_B(T, F) = F$

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(1 Punkt)** Gebt eine echte Σ-Unteralgebra von A an.
2. **(6 Punkte)** Gebt einen Σ-Homomorphismus $h : A \rightarrow B$ an.
   Stellt die Homomorphiebedingungen für die einzelnen Operationssymbole auf.
   Beweist, daß h die Homomorphiebedingungen für die Operationssymbole z: $\rightarrow n$ und s: $n \rightarrow n$ erfüllt.
3. **(4 Punkte)** Beweist, daß es keinen Σ-Homomorphismus $g : B \rightarrow A$ gibt.
4. **(1 Punkt)** Wieviele Elemente müssen die Trägermengen C_n und C_j einer Σ-Algebra C mindestens enthalten?
5. **(1 Punkt)** Kann man aus der Signatur Σ durch Entfernen eines einzelnen Operationssymbols eine Untersignatur Σ_1 erzeugen, so daß es nun vom Σ_1-Redukt der Algebra B in das Σ_1-Redukt der Algebra A einen Homomorphismus gibt?
   (Nur ‚Ja.' oder ‚Nein.'!)

Aufgabe 6, Termalgebra, Gleichungen (15 Punkte)

Gegeben sei die folgende Signatur Σ:

$$
\begin{array}{lll}
\Sigma = & \textbf{sorts} & \text{l, d} \\
 & \textbf{opns} & \text{k:} \quad \to \text{d} \\
 & & \text{empty:} \quad \to \text{l} \\
 & & \text{ksucc:} \quad \text{d} \to \text{d} \\
 & & \text{radd:} \quad \text{l d} \to \text{l} \\
 & & \text{ladd:} \quad \text{d l} \to \text{l}
\end{array}
$$

sowie folgende Σ-Algebra A:

- $A_d = \{0, 1, 2, 3\}$
- $A_l = \{0, 1, 2, 3\}^*$
- $k_A = 0$
- $empty_A = \lambda$
- $ksucc_A(x) = \begin{cases} 1 & : \text{ falls } x = 0 \\ 2 & : \text{ falls } x = 1 \\ 3 & : \text{ falls } x = 2 \\ 0 & : \text{ falls } x = 3 \end{cases}$
- $radd_A(w, x) = wx$, für alle $(w, x) \in A_l \times A_d$
- $ladd_A(x, w) = xw$, für alle $(x, w) \in A_d \times A_l$

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(1 Punkt)** Gebt zu beiden Sortensymbolen je einen Grundterm an, der mindestens 4 Operationssymbole enthält.

2. **(3 Punkte)** Stellt die Grundtermalgebra T_Σ auf. (Die rekursive Definition der Trägermengen ist erlaubt (und empfehlenswert), vergeßt aber bitte nicht, bei den Abbildungen die Funktionalitäten anzugeben.)

3. **(6 Punkte)** Gegeben sei das folgende Variablensystem X mit
   $X_d = \{x, y\}$ und
   $X_l = \{w\}$.

   (a) (2 Punkt) Gebt eine Variablenbelegung $ass : X \to A$ an und wertet den Term $radd(ladd(x, w), y)$ schrittweise gemäß der Definition von $xeval(ass)$ aus.
   Hinweis: Ihr könnt in dieser und den weiteren Aufgaben die folgenden abkürzenden Schreibweisen verwenden:

   $$
   \begin{array}{lll}
   eva_l & =_{def} & xeval(ass)_l \\
   eva_d & =_{def} & xeval(ass)_d
   \end{array}
   $$

   (b) (4 Punkte) Beweist oder widerlegt die Gültigkeit der folgenden Gleichungen in der Σ-Algebra A:

   (e1) $radd(ladd(x, w), y) = ladd(x, radd(w, y))$

   (e2) $radd(ladd(x, w), y) = radd(radd(w, x), y)$

4. **(1 Punkt)** Warum ist $ker(eval(A))$ eine Σ-Kongruenz über T_Σ?

5. **(3 Punkte)** Stellt die Quotientenalgebra $B =_{def} T_\Sigma|_{ker(eval(A))}$ auf.

6. **(1 Punkt)** Gebt die Äquivalenzklasse $[ladd(ksucc(k), radd(empty, k))]_{ker((eval(A))}$ an, ohne Euch dabei auf andere Äquivalenzklassen zu beziehen.

Zusatzaufgabe, Spezifikation (8 Punkte)

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf die Signatur Σ und die Algebra A aus der vorangegangenen Aufgabe 6).

1. **(3 Punkte)** Gebt eine Gleichungsmenge E an, sodaß $T_\Sigma|_{ker(eval(A))} = T_\Sigma|_{\sim^E}$ ist. (Kein Beweis!)

   Hinweis: Das ist genau dann der Fall, wenn $ker(eval(A)) = \sim^E$ ist.

2. **(3 Punkte)** Beweist die Isomorphie von $T_\Sigma|_{ker(eval(A))}$ und Algebra A.

   Hinweis: Es genügt zu zeigen, daß $eval(A)$ surjektiv ist.

3. **(2 Punkte)** Wir erweitern die Signatur Σ und die Algebra A um ein Sortensymbol n bzw. die Trägermenge $A_n = \mathbb{N}$ und die folgenden Operationssymbole bzw. Abbildungen:

z: $\rightarrow n$	$\mathrm{z}_A = 0$
succ: $n \rightarrow n$	$\mathrm{succ}_A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $\mathrm{succ}_A(x) = x + 1$
length: $l \rightarrow n$	$\mathrm{length}_A : A_l \rightarrow \mathbb{N}$ $\mathrm{length}_A(w) = \sharp(w)$

   zu einer Signatur Σ' bzw. einer Σ'-Algebra A', wobei mit $\sharp(w)$ die Anzahl der Buchstaben des Wortes w bezeichnet ist.

   Ergänzt E zu einer Gleichungsmenge E', sodaß $T_{\Sigma'}|_{\sim^{E'}}$ isomorph zur Algebra A' ist.