TheGI 2 im SS 1999: Nachklausur am 25. August 1999

Bei der Klausur sind 62 Punkte erreichbar, 29 im ersten und 33 im zweiten Teil. Wer 31 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Mit der Bearbeitung der Zusatzaufgabe (Struktuelle Induktion — 6 Punkte) können nicht erreichte Punkte bei den regulären Klausuraufgaben ausgeglichen werden.

Die Zusatzaufgabe (Strukturelle Induktion) ist vom Schwierigkeitsgrad etwas höher als die Klausuraufgaben. Wenn Strukturelle Induktion nicht Euer „Spezialgebiet" ist, solltet Ihr sie erst am Schluß bearbeiten.

Lest Euch auf jeden Fall zuerst alle Aufgaben in Ruhe durch und fangt dann mit der Bearbeitung derjenigen Aufgaben an, die Ihr beherrscht und die Euch am wenigsten aufwendig erscheinen.

Bitte benutzt für die Lösung jeder Aufgabe ein neues Blatt; wir haben Blätter vorrätig, falls Euer Vorrat verbraucht ist.

Schreibt bitte auf jedes von Euch abgegebene Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer!

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Z	Σ
Punkte	6	4	11	8	16	17	6	63 (+6)

Punkteverteilung(**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Z	Σ	Note
Punkte									
Kürzel									

Teil 1: Mengen, Relationen, Abbildungen, Ordnungen, Äquivalenzrelationen

Aufgabe 1, Mengen (6 Punkte)

1. **(3 Punkte)** Sei $A_1 = \{\emptyset, \{1\}\}$, $A_2 = \{\emptyset\}$, $A_3 = \{1, \{\emptyset\}\}$.
   Gebt folgende Mengen elementweise an:
   (a) $A_3 \setminus (A_1 \times A_2)$
   (b) $\mathcal{P}(A_3)$
   (c) $A_2 \setminus A_3$

2. **(3 Punkte)** Beweist oder widerlegt die folgenden Aussagen:
   (a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
   (b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$

Aufgabe 2, Relationen (4 Punkte)

Sei $A = \{a, b, c\}$ uns $B = \{1, 7, 13, 42\}$.

1. **(2 Punkte)** Gebt eine rechts- und linkstotale, aber weder rechts- noch linkseindeutige Relation $R_1 \subseteq A \times B$ an. (Die graphische Visualisierung des Graphen ist ausreichend.)
2. **(2 Punkte)** Gebt eine rechts- und linkseindeutige, aber weder rechts- noch linkstotale Relation $R_2 \subseteq A \times B$ an. (Die graphische Visualisierung des Graphen ist ausreichend.)

Aufgabe 3, Abbildungen
Äquivalenzrelationen (11 Punkte)

1. **(6 Punkte)** Welche der Eigenschaften injektiv und surjektiv treffen auf die folgenden Abbildungen zu? Beweist alle 4 Aussagen![1]
   (a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{0\leq} : x \mapsto \sqrt{x}$
   (b) $g : \mathbb{R}^{0\leq} \to \mathbb{N} : x \mapsto y$ falls $y \leq x \leq y+1$

2. **(6 Punkte)** Sei $A = \{a,b,c,d,e,f\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ und $Q = \{\{a,b,d\},\{c,e\},\{f\}\}$.
   (a) **(1 Punkt)** Gebt eine totale Abbildung $f : A \to B$ an, für die $A|_{Ker(f)} = Q$ gilt.
   (b) **(2 Punkte)** Sei $G \subseteq A|_{Ker(f)} \times B$ die Relation $G = \{(M, f(x)) | M \in A|_{Ker(f)} \wedge x \in M\}$. Beweist, daß G ein totale Abbildung ist.
   (**Hinweis:** Nutzt Euer Wissen über die Elemente von $A|_{Ker(f)}$.)
   (c) **(1 Punkt)** Gebt eine Menge B' an, sodaß es keine Abbildung $f' : A \to B'$ mit $A|_{Ker(f')} = Q$ gibt.
   (d) **(1 Punkt)** Gebt bezüglich $Ker(f)$ ein Repräsentantensystem S von Q an.

Aufgabe 4, Ordnungen (8 Punkte)

Seien $R_1, R_2 \subseteq A \times A$ zwei Ordnungen über einer Menge A.

Beweist (6 Punkte) oder wiederlegt (2 Punkte):

1. $R_3 =_{def} R_1 \cap R_2$ ist eine Ordnung.
2. $R_4 =_{def} R_1 \cup R_2$ ist eine Ordnung.

[1] $\mathbb{R}^{0\leq} = \{q \in \mathbb{R} | 0 \leq q\}$

Teil 2: Signatur, Spezifikation, Algebren, Terme, Homomorphismen

Aufgabe 5, Algebren, Homomorphismen, Gleichungen (16 Punkte)

Gegeben sei die folgende Signatur:

$\Sigma =$	**sorts**	q , d	
	opns	e:	$\to$ q
		w:	q $\to$ d
		k:	q $\to$ q

Desweiteren seien zwei Σ-Algebren A und B wie folgt definiert:[2]

A	B
$A_q = \{0,1,2,...,9\}^*$ $A_d = \mathbb{Z}$	$B_q = \mathbb{Q}^+$ $B_d = \{T, F\}$
$e_A = 42$	$e_B = 1$
$w_A : A_q \to A_d;$ $x \mapsto 42$	$w_B : B_q \to B_d;$ $x \mapsto \begin{cases} T & : \text{falls } x \in \mathbb{N} \\ F & : \text{sonst} \end{cases}$
$k_A : A_q \to A_q;$ $x \mapsto 42x13$	$k_B : B_q \to B_q;$ $x \mapsto \frac{1}{x}$

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(2 Punkt)** Gebt eine Σ-Unteralgebra von B an, deren Trägermengen minimal sind, d.h. möglichst wenig Elemente enthalten.

2. **(6 Punkte)** Gebt einen Σ-Homomorphismus $h : A \to B$ an und beweist die Homomorphieeigenschaften.
   (**Hinweis:** Nutzt Eure Lösung aus der vorangegangenen Aufgabe 5.1 .)

[2] $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} | 0 < q\}$

3. **(4 Punkte)** Beweist oder widerlegt die Gültigkeit der Gleichung

$$k(k(x)) = x$$

in den Algebren A und B, wobei x eine Variable zum Sortensymbol q ist.
Hinweis: Ihr könnt in dieser und den weiteren Aufgaben die folgenden abkürzenden Schreibweisen verwenden:

$$\begin{aligned} eva_q &=_{def} xeval(ass)_q \\ eva_d &=_{def} xeval(ass)_d \end{aligned}$$

Eine schrittweise Auswertung der Terme ist in dieser Aufgabe nicht gefordert.

4. **(2 Punkte)** Gibt es einen Σ-Homomorphismus $h : B \to A$? Beweist Eure Aussage.

5. **(2 Punkte)** Gegeben sei das folgende Variablensystem X mit
$X_q = \{x\}$ und
$X_d = \{y\}$.

Gebt eine Variablenbelegung $ass : X \to A$ an und wertet den Term $w(k(x))$ schrittweise gemäß der Definition von $xeval(ass)$ aus.

Aufgabe 6, Termalgebra, Quotiententermalgebra, Spezifikation (17 Punkte)

Gegeben sei die folgende Signatur Σ:

$$\Sigma = \begin{array}{lll} \textbf{sorts} & \mathrm{n} & \\ \textbf{opns} & \mathrm{one:} & \to \mathrm{n} \\ & \mathrm{succ:} & \mathrm{n} \to \mathrm{n} \\ & \mathrm{nadd:} & \mathrm{n}\ \mathrm{n} \to \mathrm{n} \\ & \mathrm{nmul:} & \mathrm{n}\ \mathrm{n} \to \mathrm{n} \end{array}$$

sowie folgende Σ-Algebra A[3]:

- $A_n = \mathbb{N}^+$
- $one_A = 1$
- $succ_A(x) : A_n \to A_n$
  $x \mapsto x + 1$
- $nadd_A : A_n \times A_n \to A_n$
  $(x, y) \mapsto x + y$
- $nmul_A : A_n \times A_n \to A_n$
  $(x, y) \mapsto x \cdot y$

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(3 Punkte)** Stellt die Grundtermalgebra T_Σ auf. (Die rekursive Definition der Trägermenge ist erlaubt — und empfehlenswert, vergeßt aber bitte nicht, bei den Abbildungen die Funktionalitäten anzugeben.)

2. **(10 Punkte)**

   (a) **(4 Punkte)** Ergänzt die rechten Seiten der folgenden Gleichungen so, daß die Quotiententermalgebra $T|_{\sim\{e1,e2,e3,e4\}}$ isomorph zu A ist.

   (e1) $nadd(one, x) =$
   (e2) $nadd(succ(y), x) =$
   (e3) $nmul(one, x) =$
   (e4) $nmul(succ(y), x) =$

   Ein Beweis der Isomorphie ist nicht nötig!
   (**Hinweis:** Beachtet, daß die Konstante one_A nicht 0 sondern 1 ist!)

[3] $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

(b) **(1 Punkt)** Welche Eigenschaft von $eval(A) : T_\Sigma \to A$ wäre für den Nachweis der Isomorphie zu zeigen, falls $ker(eval(A)) = \sim^{\{e1,e2,e3,e4\}}$ gilt?

(c) **(3 Punkte)** Stellt die Quotientenalgebra $B =_{def} T_\Sigma|_{\sim^{\{e1,e2,e3,e4\}}}$ gemäß der allg. Definition auf.
(**Hinweis:** Da $\sim^{\{e1,e2,e3,e4\}} = ker(eval(A))$ gilt, ist diese Aufgabe unabhänig von den Aufgabenteilen (a) und (b) lösbar!)

(d) **(2 Punkte)** Gebt vier Terme aus der Äquivalenzklasse $[nadd(succ(one), one)]_{\sim^E}$ an.
(**Hinweis:** Da $\sim^{\{e1,e2,e3,e4\}} = ker(eval(A))$ gilt, ist diese Aufgabe unabhänig von den Aufgabenteilen (a) und (b) lösbar!)

3. **(4 Punkte)** Wir erweitern die Signatur Σ und die Algebra A um ein Sortensymbol q bzw. die Trägermenge $A_q = \mathbb{Q}^+$ und die folgenden Operationssymbole bzw. Abbildungen:

$bruch : nn \to q$	$bruch_A : A_n \times A_n \to A_q$ $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$
$qadd : qq \to q$	$qadd_A : A_q \times A_q \to A_q$ $(x, y) \mapsto x + y$
$qmul : qq \to q$	$qmul_A : A_q \times A_q \to A_q$ $(x, y) \mapsto x \cdot y$

zu einer Signatur Σ' bzw. einer Σ'-Algebra A'.

(a) **(1 Punkt)** Was stellt die Algebra A bezüglich Algebra A' dar?

(b) **(3 Punkte)** Ergänzt die rechten Seiten der folgenden Gleichungen so, daß die Quotiententermalgebra $T|_{\sim^{\{e1,e2,e3,e4,e5,e6,e7\}}}$ isomorph zu A' ist.
(**Hinweis:** Orientiert Euch an den Rechenregeln für Bruchrechnung.)

(e1) $bruch(nmul(x, z), nmul(y, z)) =$

(e2) $qadd(bruch(r, s), bruch(t, u)) =$

(e3) $qmul(bruch(r, s), bruch(t, u)) =$

Zusatzaufgabe, Strukturelle Induktion (6 Punkte)

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf die Signatur Σ und die Algebra A aus der vorangegangenen Aufgabe 6).

1. **(6 Punkte)** Beweist:

$$\forall t \in T_\Sigma \exists n \in \mathbb{N} : t \sim^{\{e1,e2,e3,e4\}} succ^n(one)$$