TheGI 2: Berechenbarkeit und Komplexität

Veranstalter: Uwe Nestmann, Johannes Borgström, Philipp Küfner
Sommersemester 2007 - 17. Juli 2007

2. Schriftliche Leistungskontrolle

Punktzahl In dieser schriftlichen Leistungskontrolle sind 100 Punkte erreichbar. Wer 40 Punkte erreicht, hat die schriftliche Leistungskontrolle bestanden (Note 4.0 oder besser).

Bearbeitungsdauer Die Bearbeitungsdauer beträgt 110 Minuten.

Hilfsmittel Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist die in der Vorlesung verwendete und auf der Vorlesungsseite bereit gestellte „Formelsammlung Sommersemester 2007“. Diese darf sich nicht von der Originalversion unterscheiden (also keine Notizen etc. enthalten). Eigenes Papier darf *nicht* verwendet werden.

Aufgabenreihenfolge Die gegebene Reihenfolge der Aufgaben orientiert sich an der Themenreihenfolge in der Vorlesung. Es wird daher empfohlen, die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben selbst durch Abschätzung des Aufwands für die einzelnen Aufgaben festzulegen.

- Antworten zu den Aufgaben sind auf demselben Blatt zu geben, auf dem die jeweilige Aufgabenstellung steht. Dabei können beide Seiten der Blätter verwendet werden. Sofern weitere Blätter benötigt werden, werden diese durch uns bereitgestellt. **Lösungen zu verschiedenen Aufgaben sind stets auf unterschiedlichen Blättern abzugeben!**
- Auf jedem abgegebenen Blatt ist die **bearbeitete Aufgabe, Name und Matrikelnummer** anzugeben.
- Antworten oder Teile von Antworten, die mit Rotstift oder Bleistift geschrieben oder nicht eindeutig lesbar sind, werden nicht bewertet.

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	Studiengang:

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	0	1	2	3	4		Σ	Note
Punkte	25	15	20	25	15		100	
Erreicht								
Korrektor								

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 0 (25 Punkte) Beantworte **ohne Begründung** die folgenden Aussagen. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Aussagen (Zeilen, in denen kein Kreuz gemacht wurde) werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe 0 aber mindestens null Punkte. Nicht eindeutige Markierungen werden mit Punktabzug gewertet!

(a) Gleichmächtig zu den Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind...

Wahr	Falsch	
☐	☐	$[0,1]$ aus $\mathbb{R}$
☐	☐	$\mathcal{P}(\mathbb{N})$
☐	☐	$\mathbb{Z}$

(b) Kreuze die richtigen Aussagen an:

Wahr	Falsch	
☐	☐	L ist akzeptierbar $\Rightarrow$ L ist vom Typ 0.
☐	☐	L ist vom Typ 0 $\Rightarrow$ L ist akzeptierbar.

(c) Sei $A_{\mathrm{H}^S} := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w$ hält für das Wort $w\}$ das spezielle Halteproblem. Ist das spezielle Halteproblem auf das Halteproblem reduzierbar?

Wahr	Falsch
☐	☐

(d) Es gilt $A_1 \leq_{\mathrm{red}} A_2 \ \wedge \ A_1 \leq_{\mathrm{red}} A_3 \ \Rightarrow \ A_2 \leq_{\mathrm{red}} A_3$.

Wahr	Falsch
☐	☐

(e) Sei $A_{\mathrm{fib}} = \{\mathrm{fib}(n-1)+\mathrm{fib}(n-2) \mid n \in \mathbb{N}, n > 2, \mathrm{fib}(1) = \mathrm{fib}(2) = 1\}$ die Sprache, die genau die Fibonacci-Zahlen in dezimaler Darstellung enthält. Gilt $A_{\mathrm{fib}} \in \mathrm{P}$?

Wahr	Falsch
☐	☐

(f) Sei $A_{\mathrm{unmult}} = \{1^k\#1^l\#1^m \mid k \cdot l = m; k,l,m \in \mathbb{N}\}$.
Seien $f,g,h,i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} f(n) &= n \\ g(n) &= n^2 \\ h(n) &= 2^n \end{aligned}$$

Welche der Aussagen sind richtig?

Wahr	Falsch	
☐	☐	$A_{\mathrm{unmult}} \in \mathrm{DTIME}(f)$
☐	☐	$A_{\mathrm{unmult}} \in \mathrm{DTIME}(g)$
☐	☐	$A_{\mathrm{unmult}} \in \mathrm{DTIME}(h)$

Bitte wenden!

(g) Sei $A_{\text{add}} = \{a\#b\#c \mid a, b, c \in \{0,1\}^*, 1 \leq |a| = |b| \leq |c|, a + b = c\}$.
Welche der Aussagen sind richtig?

Wahr	Falsch	
☐	☐	$A_{\text{add}} \cap A_{\text{add}} \in \text{P}$
☐	☐	$A_{\text{add}} A_{\text{add}} \in \text{P}$
☐	☐	$\overline{A_{\text{add}}} \in \text{P}$

(h) Welche Aussagen stimmen?

Wahr	Falsch	
☐	☐	$\text{O}(n^2) \subset \text{O}(5n^2 + 8)$
☐	☐	$\text{O}(n^2) \subseteq \text{O}(5n^2 + n)$
☐	☐	$\text{O}(n^2) \supset \text{O}(5n)$
☐	☐	$\text{O}(n^2) \subseteq \text{O}(5n^3)$
☐	☐	$\text{O}(n^2) \subseteq \text{O}(n^{2^n})$

(i) Wenn es von einer NTM eine Berechnung gibt, die keine Endkonfiguration besitzt, so ist der Zeitaufwand nicht beschränkt.

Wahr	Falsch
☐	☐

(j) Seien Σ_1 und Σ_2 zwei Alphabete und $A_1 \subseteq \Sigma_1^*, A_2 \subseteq \Sigma_2^*, A_1 \leq_{\text{pol}} A_2$.
Es gilt: Falls $A_2 \in \text{P}$, dann auch $A_1 \in \text{PSPACE}$.

Wahr	Falsch
☐	☐

(k) Sei **0** der λ-Ausdruck $\lambda f.\lambda x.x$ und **succ** $:= \lambda n.\lambda f.\lambda x.f\,((n\,f)\,x)$. Welche der folgenden λ-Ausdrücke sind β-kongruent zu $\mathbf{1}(= \mathbf{succ}\ \mathbf{0})$?

Wahr	Falsch	
☐	☐	$\lambda f.\lambda x.x$
☐	☐	$\lambda f.\lambda x.f$
☐	☐	$\lambda f.\lambda x.f\,x$
☐	☐	$\lambda f.\lambda x.f\,(f\,x)$

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (15 Punkte) Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Zeige mittels Diagonalisierung, dass $F := \{A \mid A \subseteq \Sigma^*\}$ überabzählbar ist.

Aufgabe 2 (20 Punkte) Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $A = \{w \in \Sigma^* \mid \mathrm{L}(M_w) = \Sigma^*\}$.

Achtung: im Folgenden muss nur (1) oder (2) bearbeitet werden!

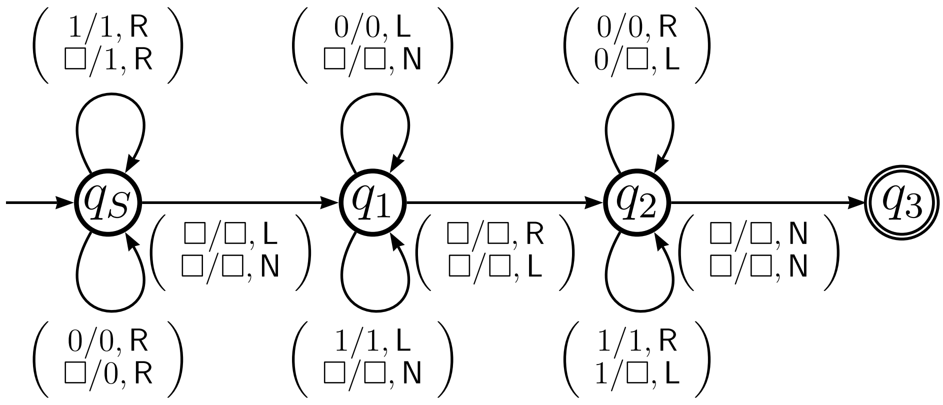
(1) Zeige die Unentscheidbarkeit von A entweder mittels Selbstanwendung;

(2) oder begründe die Unentscheidbarkeit von A mit Reduktion.
Im Fall (2) (also sofern Reduktion verwendet wird), gelten folgende Hinweise:

- Verwende dazu die Sprache A_{U} aus der Formelsammlung
- Die Korrektheit der angegebenen Reduktion ist nachzuweisen.
- Für die Reduktion zu konstruierende Turingmaschinen müssen nicht formal angegeben, sondern können auch textuell oder graphisch beschrieben werden, sofern die Beschreibung präzise und eindeutig erfolgt.
- Die Church-Turing-These darf verwendet werden, sofern die intuitive Berechenbarkeit an der entsprechende Stelle eindeutig ist.

Aufgabe 3 (25 Punkte) Seien $\Sigma = \{0, 1\}$ und $A = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^{-1}\}$.

a) (5 Punkte) Die Turingmaschine $M_a = (\{q_S, q_1, q_2, q_3\}, \Sigma, \Sigma \cup \{\square\}, \square, 2, \delta_a, q_S, \{q_3\})$, sei außerdem durch folgenden Graphen gegeben:



Fülle die nachfolgende Tabelle aus

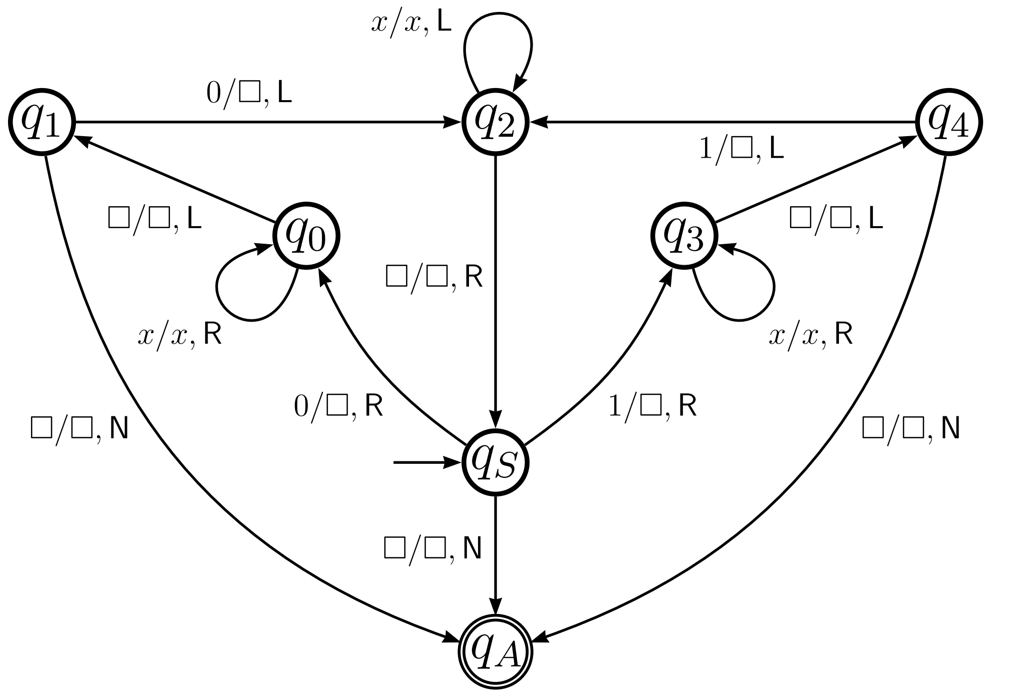
w	time_{M_a}	space_{M_a}
λ		
1		
010		
011		
1001		

und gib allgemein die Funktionen

- $\text{Space}_{M_a} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und
- $\text{Time}_{M_a} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an.

Bitte wenden!

b) (5 Punkte) Die Turingmaschine $M_b = (\{q_S, q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_A\}, \Sigma, \Sigma \cup \{\Box\}, \Box, 1, \delta_b, q_S, \{q_A\})$, sei außerdem durch folgenden Graphen gegeben ($x \in \Sigma$):



Fülle die nachfolgende Tabelle aus.

w	time_{M_b}	space_{M_b}
λ		
1		
010		
011		
1001		

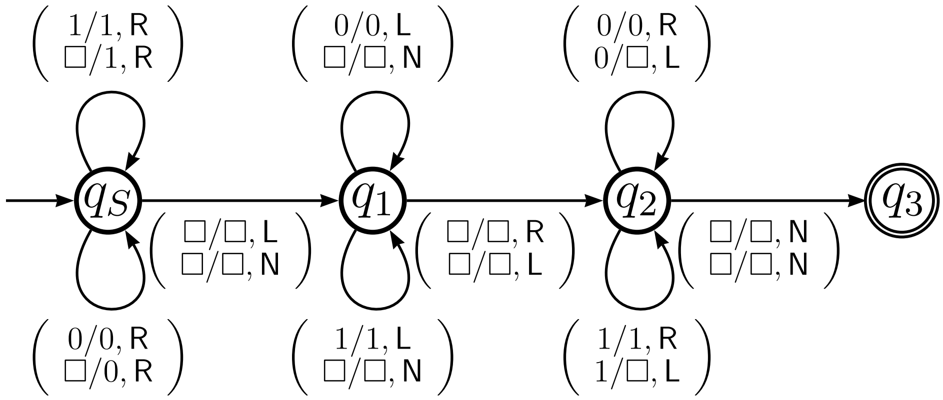
und gib allgemein

- die Funktion $\text{Space}_{M_b} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und
- eine obere Schranke $s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für die Anzahl der Schritte bei Eingaben der Länge n an, wobei auch gelten soll: $\mathrm{O}(s) = \mathrm{O}(\text{Time}_{M_b})$.

c) (5 Punkte) Welches ist das kleinste $k \in \mathbb{N}$, so dass gilt $A \in \mathrm{DTIME}(n \mapsto n^k)$? Begründe Deine Antwort.

d) (10 Punkte) Sei $B = \{w\# \in \{0, 1, \#\}^* \mid w \in A\}$. Betrachte den transitiven Abschluss B^+ ($B^+ = B^* \setminus \{\lambda\}$). Erweitere bzw. korrigiere M_d (die gegebene Skizze unten) so, dass M_d die Sprache B^+ entscheidet und gib die Funktionen

- $\mathrm{Space}_{M_d} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und
- $\mathrm{Time}_{M_d} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an.



Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 4 (15 Punkte)

a) (10 punkte) Beweise das Theorem 5.2.5 der Formelsammlung:
Sei A NP-vollständig. Dann gilt $A \in \mathrm{P}$ gdw $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.
Alle weiteren Theoreme etc. der Formelsammlung können dazu verwendet werden.

b) (5 punkte) Gib die Schritte an, die notwendig sind, um für eine Sprache A nachzuweisen, dass sie NP-vollständig ist. Nenne für jede Spracheigenschaft (z.B. NP-vollständig), die Du verwendest, eine Sprache, die diese Eigenschaft besitzt.

Aufgabe: Name: Vorname: Matrikelnummer: