TheGI 2: Berechenbarkeit und Komplexität

Veranstalter: Uwe Nestmann, Johannes Borgström, Philipp Küfner
Sommersemester 2007 - 28. September 2007

Nachklausur Teil 2

Punktzahl In dieser schriftlichen Leistungskontrolle sind 100 Punkte erreichbar. Wer 40 Punkte erreicht, hat die schriftliche Leistungskontrolle bestanden (Note 4.0 oder besser).

Bearbeitungsdauer Die Bearbeitungsdauer beträgt 110 Minuten.

Hilfsmittel Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist die in der Vorlesung verwendete und auf der Vorlesungsseite bereit gestellte „Formelsammlung Sommersemester 2007“. Diese darf sich nicht von der Originalversion unterscheiden (also keine Notizen etc. enthalten). Eigenes Papier darf *nicht* verwendet werden.

Aufgabenreihenfolge Die gegebene Reihenfolge der Aufgaben orientiert sich an der Themenreihenfolge in der Vorlesung. Es wird daher empfohlen, die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben selbst durch Abschätzung des Aufwands für die einzelnen Aufgaben festzulegen, und dabei zu beachten dass Aufgaben, die mit einem * versehen sind im Schwierigkeitsgrad etwas anspruchsvoller einzustufen sind.

- Antworten zu den Aufgaben sind auf demselben Blatt zu geben, auf dem die jeweilige Aufgabenstellung steht. Dabei können beide Seiten der Blätter verwendet werden. Sofern weitere Blätter benötigt werden, werden diese durch uns bereitgestellt. **Lösungen zu verschiedenen Aufgaben sind stets auf unterschiedlichen Blättern abzugeben!**
- Auf jedem abgegebenen Blatt ist die **bearbeitete Aufgabe, Name und Matrikelnummer** anzugeben.
- Antworten oder Teile von Antworten, die mit Rotstift oder Bleistift geschrieben oder nicht eindeutig lesbar sind, werden nicht bewertet.

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	Studiengang:

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	0	1	2	3	4		Σ	Note
Punkte	20	20	15	25	20		100	
Erreicht								
Korrektor								

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 0 (20 Punkte) Beantworte **ohne Begründung** die folgenden Aussagen. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Aussagen (Zeilen, in denen kein Kreuz gemacht wurde) werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe 0 aber mindestens null Punkte. Nicht eindeutige Markierungen werden mit Punktabzug gewertet!

(a) Wir haben drei unendliche Kardinalzahlen gesehen: $\aleph_0$ beschreibt die Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ und allen anderen gleichmächtigen Mengen, $\aleph_1$ beschreibt die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ und allen anderen gleichmächtigen Mengen, und die Kardinalzahl $\aleph_2$, die die Mächtigkeit von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ und allen anderen gleichmächtigen Mengen beschreibt.

Wahr	Falsch	
☐	☐	Es gibt genau diese drei Kardinalzahlen.
☐	☐	Es gibt mehr als drei Kardinalzahlen.

(b) Sei A_1 auf A_2 reduzierbar. Was folgt daraus in Bezug auf die folgenden Aussagen:

Wahr	Falsch	
☐	☐	A_2 entscheidbar $\Rightarrow$ A_1 entscheidbar.
☐	☐	A_1 unentscheidbar $\Rightarrow$ A_2 unentscheidbar.
☐	☐	A_2 nicht akzeptierbar $\Rightarrow$ A_1 nicht akzeptierbar.
☐	☐	A_1 nicht akzeptierbar $\Rightarrow$ A_2 nicht akzeptierbar.
☐	☐	A_1 akzeptierbar $\Rightarrow$ A_2 akzeptierbar

(c) Das Theorem von Rice besagt, dass es unmöglich ist, irgendeinen nicht-trivialen Aspekt von Sprachen, die von einer Turingmaschine akzeptiert werden, algorithmisch zu überprüfen.

Wahr	Falsch
☐	☐

(d) Zu jeder Sprache L $\in$ NP gibt es eine DTM, die L in höchstens exponentieller Zeit entscheidet.

Wahr	Falsch
☐	☐

Bitte wenden!

(e) Es gilt:

Wahr	Falsch	
☐	☐	$\mathrm{O}(n^2) \subsetneq \mathrm{O}(n^2 + n)$
☐	☐	$\mathrm{O}(n^2) \subseteq \mathrm{O}(10^6 n^2 + n)$
☐	☐	$\mathrm{O}(n^2) \supsetneq \mathrm{O}(n^2 \cdot n)$
☐	☐	$\mathrm{O}(n^2) \supsetneq \mathrm{O}(10^6 n \cdot n)$
☐	☐	$\mathrm{O}(n^6) \subsetneq \mathrm{O}(n^{(2^3)})$

(f) Seien Σ_1 und Σ_2 zwei Alphabete und $A_1 \subseteq \Sigma_1^*, A_2 \subseteq \Sigma_2^*, A_1 \leq_{\text{pol}} A_2$.
Es gilt: Falls $A_2 \in$ NP, dann auch $A_1 \in$ NPSPACE.

Wahr	Falsch
☐	☐

(g) Der Kombinator $\text{if}\, c\, \text{then}\, p\, \text{else}\, q$ kann im λ-Kalkül als $\lambda c.\lambda p.\lambda q.(c\ p)\ q$ definiert werden. Wie kann man die Aussagenlogische Negation $\neg c$ definieren (es soll natürlich gelten: $\neg\,\text{true} = \text{false}$ und $\neg\,\text{false} = \text{true}$)?
Hinweis: $\text{true} := \lambda x.\lambda y.x$ und $\text{false} := \lambda x.\lambda y.y$

Wahr	Falsch	
☐	☐	$\lambda c.(c\ false)\ true$
☐	☐	$\lambda c.(c\ true)\ false$
☐	☐	$\lambda c.\lambda x.\lambda y.(c\ y)\ x$
☐	☐	$\lambda c.(c\ false)c$

(h) Alle NP-harten Probleme, die in P liegen, sind NP-vollständig.

Wahr	Falsch
☐	☐

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Die Sprache A sei wie folgt definiert:

$$A = \{u111w \in \{0,1\}^* \mid M_u \text{ terminiert bei Eingabe } w \text{ nach einer geraden Anzahl von Schritten} \wedge u \in A_{\text{KTM}}\}$$

a) (5 Punkte) Definiere formal, was „terminiert bei Eingabe w nach einer geraden Anzahl von Schritten“ heisst.

b) (10 punkte) Zeige mittels Diagonalisierung, dass A nicht entscheidbar ist. Begründe insbesondere, dass im Beweis verwendete Konstruktionen von Turingmaschinen berechenbar sind.

c) (5 punkte) Ist A akzeptierbar? Begründe Deine Antwort.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Die Sprache A sei wie folgt gegeben:
$A = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall w' \in \{0,1\}^* \exists \alpha, \beta.\, (q_1, \triangleright w') \vdash^*_{M_w} (q_4, \alpha \triangleright \beta)\}$
Achtung: im Folgenden muss nur (1) oder (2) bearbeitet werden!

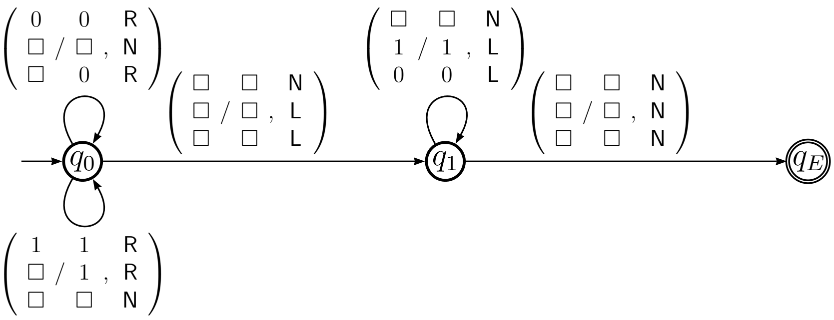
(1) Zeige die Unentscheidbarkeit von A entweder mittels Selbstanwendung;

(2) oder begründe die Unentscheidbarkeit von A mit Reduktion.
Im Fall (2) (also sofern Reduktion verwendet wird), gelten folgende Hinweise:

- Verwende dazu die Sprache A_{U} aus der Formelsammlung
- Die Korrektheit der angegebenen Reduktion ist nachzuweisen.
- Für die Reduktion zu konstruierende Turingmaschinen müssen nicht formal angegeben, sondern können auch textuell oder graphisch beschrieben werden, sofern die Beschreibung präzise und eindeutig erfolgt.
- Die Church-Turing-These darf verwendet werden, sofern die intuitive Berechenbarkeit an der entsprechende Stelle eindeutig ist.

Aufgabe 3 (25 Punkte)
Sei $\Sigma = \{0, 1\}$.

a) (12 punkte) Die Turingmaschine $M_a = (\{q_0, q_1, q_E\}, \Sigma, \Sigma \cup \{\Box\}, \Box, 3, \delta_a, q_0, \{q_E\})$, sei außerdem durch folgenden Graphen gegeben:



i. Gib die Sprache $\mathrm{L}(M_a)$ formal an.

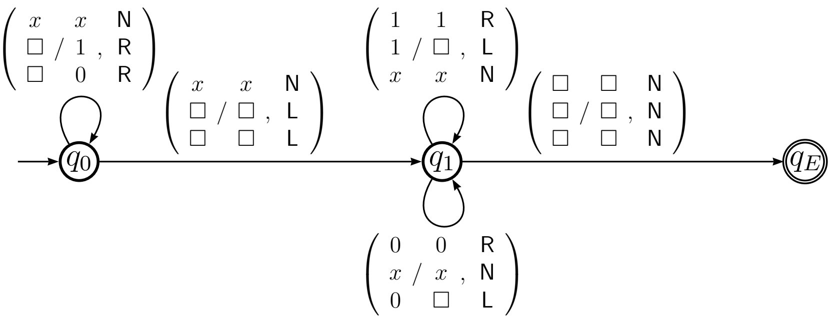
ii. Fülle die nachfolgende Tabelle aus

w	time_{M_a}	space_{M_a}
λ		
1		
01011		
100011		
11110000		

iii. und gib allgemein die Funktionen
- $\text{Space}_{M_a} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und
- $\text{Time}_{M_a} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an.

iv. Beantworte die folgenden Fragen mit ja oder nein, eine Begründung ist nicht erforderlich, sofern Space_{M_a} und Time_{M_a} angegeben wurde.
- Gilt $\mathrm{O}(\text{Space}_{M_a}) = \mathrm{O}(n \mapsto n^2)$?
- Gilt $\text{Time}_{M_a} \in \mathrm{O}(n \mapsto n^2)$?

b) (13 Punkte) Die Turingmaschine $M_b = (\{q_0, q_1, q_E\}, \Sigma, \Sigma \cup \{\square\}, \square, 3, \Delta_b, q_0, \{q_E\})$, sei außerdem durch folgenden Graphen gegeben ($x \in \{0, 1, \square\}$):



i. Fülle die nachfolgende Tabelle aus

w	time_{M_b}	space_{M_b}
λ		
1		
01011		
100011		
11110000		

ii. und gib allgemein die Funktionen

- $\text{Space}_{M_b} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und
- $\text{Time}_{M_b} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an.

iii. Welches ist das kleinste $k \in \mathbb{N}$, so dass gilt $\mathrm{L}(M_b) \in \mathrm{NTIME}(n \mapsto n^k)$? Begründe Deine Antwort.

iv.* Gilt $\mathrm{O}(\text{Time}_{M_b}) = \mathrm{O}(n \mapsto n)$? Begründe Deine Antwort.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 4 (20 Punkte) Zeige, dass $A_{\mathrm{U}} \leq_{\mathrm{pol}} A_{\mathrm{H}}$.
Was wird dadurch gezeigt bezüglich Komplexität bzw. Entscheidbarkeit?