TheGI 2: Berechenbarkeit und Komplexität

Veranstalter: Uwe Nestmann, Johannes Borgström, Philipp Küfner
Sommersemester 2007 - 5. Juni 2007

1. Schriftliche Leistungskontrolle

Punktzahl In dieser schriftlichen Leistungskontrolle sind 100 Punkte erreichbar. Wer 40 Punkte erreicht, hat die schriftliche Leistungskontrolle bestanden (Note 4.0 oder besser).

Bearbeitungsdauer Die Bearbeitungsdauer beträgt 110 Minuten.

Hilfsmittel Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist die in der Vorlesung verwendete und auf der Vorlesungsseite bereitgestellte "Formelsammlung Sommersemester 2007". Diese darf sich nicht von der Originalversion unterscheiden (also keine Notizen etc. enthalten).

Aufgabenreihenfolge Die gegebene Reihenfolge der Aufgaben orientiert sich an der Themenreihenfolge in der Vorlesung. Es wird daher empfohlen die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben selbst durch Abschätzung des Aufwands für die einzelnen Aufgaben festzulegen und dabei zu beachten dass Aufgaben, die mit einem * versehen sind im Schwierigkeitsgrad etwas anspruchsvoller einzustufen sind.

- Antworten zu den Aufgaben sind auf demselben Blatt zu geben, auf dem die jeweilige Aufgabenstellung steht. Dabei können beide Seiten der Blätter verwendet werden. Sofern weitere Blätter benötigt werden, werden diese durch uns bereitgestellt. **Lösungen zu verschiedenen Aufgaben sind stets auf unterschiedlichen Blättern abzugeben!**
- Auf jeden abgegebenen Blatt ist die **bearbeitete Aufgabe, Name und Matrikelnummer** anzugeben.
- Antworten oder Teile von Antworten, die mit Rotstift oder Bleistift geschrieben oder nicht eindeutig lesbar sind, werden nicht bewertet.

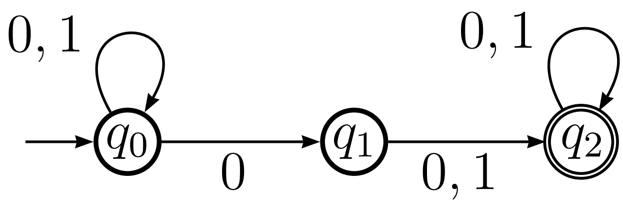
Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	Studiengang:
(Tutorin/Tutor:)	

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5		Σ	Note
Punkte	5+10+10	20	13+2+5	5+10	20		100	
Erreicht								

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (25 Punkte) Gegeben sei der NFA
$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \Delta, \{q_0\}, \{q_2\})$ mit



a) (5 Punkte) Notiere die von M akzeptierte Sprache A formal.

b) (10 Punkte) Verwende die Untermengenkonstruktion,
um einen DFA $M_{det} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ zu erzeugen, der genau A akzeptiert.
Unerreichbare Zustände müssen nicht angegeben werden.

c)* (10 Punkte)

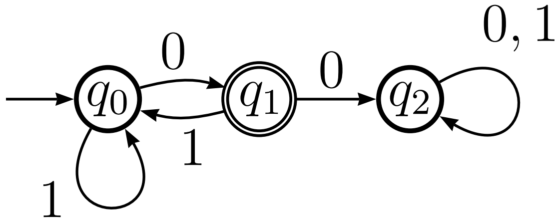
- Beweise (formal), dass $\mathrm{L}(M_{det}) \supseteq A$.
- Begründe (informell), dass $\mathrm{L}(M_{det}) \subseteq A$.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (20 Punkte) Zeige, dass die regulären Sprachen präfixabgeschlossen sind.
Zeige dazu folgende Implikation: Wenn die Sprache A regulär ist, dann ist auch $\mathrm{Pre}(A) := \{w \mid wv \in A \text{ und } w, v \in \Sigma^*\}$ regulär. Gehe dabei wie folgt vor:

- Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein beliebiger DFA.
  Gib einen DFA $M' = (Q', \Sigma', \delta', q_0', F')$ an, so dass $\mathrm{L}(M') = \mathrm{Pre}(\mathrm{L}(M))$.
- Zeige, dass $\mathrm{L}(M') = \mathrm{Pre}(\mathrm{L}(M))$
  (eine Begründung ist ebenfalls zum Erreichen der vollen Punktzahl möglich).

Hinweis: Es ist hilfreich, das allgemeine Prinzip anhand des folgenden Beispielautomaten M_B abzuleiten. Als Antwort wird jedoch lediglich die allgemeine Version für beliebiges M bzw. M' erwartet.



M_B:

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 3 (20 Punkte) Gegeben sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

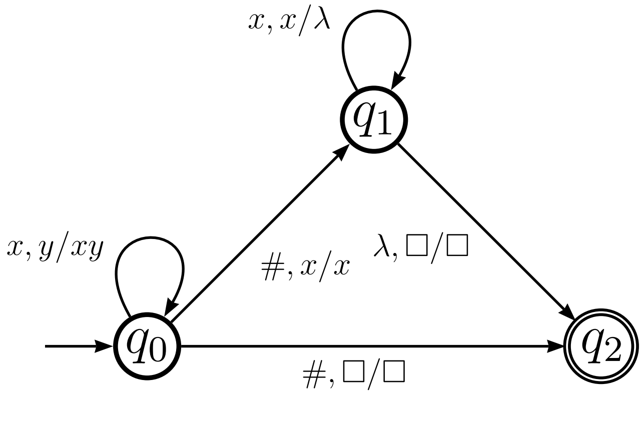
$$
\begin{array}{rcl}
V & = & \{S, T, U\} \\
\Sigma & = & \{a, b, c, d\} \\
P & = & \{ \; S \rightarrow TU \; , \\
 & & \;\;\; T \rightarrow \lambda \mid aTb \; , \\
 & & \;\;\; U \rightarrow \lambda \mid cUd \; \}
\end{array}
$$

a) (13 Punkte) Gib einen PDA an, dessen akzeptierte Sprache genau $\mathrm{L}(G)$ entspricht.

b) (2 Punkte) Bestimme, ob der in a) konstruierte Automat deterministisch ist.

c) (5 Punkte) Ist die Sprache $\mathrm{L}(G)$ deterministisch kontextfrei?
Begründe deine Antwort.

Aufgabe 4 (15 Punkte) Gegeben sei der PDA
$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1, \#\}, \{\square, 0, 1\}, \square, \Delta, q_0, \{q_2\})$
wie folgt:



wobei $x \in \{0, 1\}$ und $y \in \{0, 1, \square\}$

a) (5 Punkte) Notiere die von M durch Endzustand akzeptierte Sprache $\mathrm{L}_{End}(M)$ formal.

b) (10 Punkte) Gib eine Turingmaschine an, die die gleiche Sprache akzeptiert.

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Eine echt positive natürliche Zahl t teilt eine natürliche Zahl x genau dann, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, für die gilt: $t \cdot n = x$. Man sagt „t ist Teiler von x" und notiert formal $t \,|\, x$.

Sei $\mathrm{Un}(:)\mathbb{N} \to \{1\}^*; n \mapsto 1^n$ eine (bijektive) Abbildung, die jeder natürlichen Zahl die unäre Darstellung zuweist. Zum Beispiel ist $\mathrm{Un}(()3) = 1^3 = 111$.
Sei $A = \{v\#w \mid \exists t \in \mathbb{N}.\exists x \in \mathbb{N}.(t \geq 1,\ x \geq 0,\ \mathrm{Un}(()t) = v,\ \mathrm{Un}(()x) = w,\ t \,|\, x)\}$.

Entwirf eine Deterministische Turingmaschine M, so dass gilt $\mathrm{L}(M) = A$. Gehe dabei wie folgt vor:

- Beschreibe die einzelnen Arbeitsschritte, die M vollziehen muss textuell in Form eines Algorithmus.
- Gib die Maschine M an.

Aufgabe: Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe: Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe: Name: Vorname: Matrikelnummer: