TheGI 2: Berechenbarkeit und Komplexität

Veranstalter: Uwe Nestmann, Johannes Borgström, Philipp Küfner

Sommersemester 2008 - 15. Juli 2008

2. Schriftliche Leistungskontrolle

Punktzahl In dieser schriftlichen Leistungskontrolle sind 100 Punkte erreichbar. Wer 40 Punkte erreicht, hat die schriftliche Leistungskontrolle bestanden (Note 4.0 oder besser).

Bearbeitungsdauer Die Bearbeitungsdauer beträgt 75 Minuten.

Hilfsmittel Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist die in der Vorlesung verwendete und auf der Vorlesungsseite bereit gestellte „Formelsammlung Sommersemester 2008". Diese darf keine Notizen enthalten (und sie darf auch während der Klausur nicht als Papier oder Schmierpapier verwendet werden). Eigenes Papier darf *nicht* verwendet werden.

Aufgabenreihenfolge Die gegebene Reihenfolge der Aufgaben orientiert sich an der Themenreihenfolge in der Vorlesung. Es wird daher empfohlen, die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben selbst durch Abschätzung des Aufwands für die einzelnen Aufgaben festzulegen.

- Antworten zu den Aufgaben sind auf demselben Blatt zu geben, auf dem die jeweilige Aufgabenstellung steht. Dabei können beide Seiten der Blätter verwendet werden. Sofern weitere Blätter benötigt werden, werden diese durch uns bereitgestellt. **Lösungen zu verschiedenen Aufgaben sind stets auf unterschiedlichen Blättern abzugeben!**
- Auf jedem abgegebenen Blatt ist die **bearbeitete Aufgabe und Matrikelnummer** anzugeben.
- Antworten oder Teile von Antworten, die mit Rotstift oder Bleistift geschrieben oder nicht eindeutig lesbar sind, werden nicht bewertet.

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	Studiengang:

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4		Σ	Note
Punkte	20	30	25	25		100	
Erreicht							
Korrektor							

Matrikelnummer:

Aufgabe 1

Beantworte **ohne Begründung** die folgenden Aussagen.

Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Aussagen (Zeilen, in denen kein Kreuz gemacht wurde) werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte. Nicht eindeutige Markierungen werden mit Punktabzug gewertet!

(a) Gleichmächtig zu den Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind...

Wahr	Falsch	
☐	☐	$[0, 1]$ aus $\mathbb{R}$
☐	☐	$\mathcal{P}(\mathbb{N})$
☐	☐	$\mathbb{Z}$

(b) Wir haben drei unendliche Kardinalzahlen gesehen: $\aleph_0$ beschreibt die Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ und allen anderen gleichmächtigen Mengen, $\aleph_1$ beschreibt die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ und allen anderen gleichmächtigen Mengen, und die Kardinalzahl $\aleph_2$, die die Mächtigkeit von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ und allen anderen gleichmächtigen Mengen beschreibt.

Wahr	Falsch	
☐	☐	Es gibt genau diese drei Kardinalzahlen.

(c) Sind A und $\overline{A}$ akzeptierbare Sprachen, so ist $\overline{A}$ auch entscheidbar.

Wahr	Falsch
☐	☐

(d) Sei $\mathcal{S} := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ ist eine konstante Funktion}\}$.

Wahr	Falsch	
☐	☐	$A_{\mathcal{S}} := \{w \mid M_w \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\}$ ist entscheidbar.
☐	☐	Wenn $f \in \mathcal{S}$, dann ist f Turingberechenbar.

(e) Welche Aussagen stimmen?

Wahr	Falsch	
☐	☐	$n^2 \in \mathrm{O}(5n^2 + 8)$
☐	☐	$n^2 \in \Theta(5n^2 + n)$
☐	☐	$n^2 \in \Omega(5n^3)$
☐	☐	$n^2 \in \Theta(n^{2^n})$

(f) Wenn $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Box, 1, \Delta, q_s, F)$, $w \in \Sigma^*$ und $(q_s, \triangleright w) \vdash_M \ldots$
(d. h. M hält nicht auf w), dann gilt $\mathrm{ntime}_M(w) = \infty$.

Wahr	Falsch
☐	☐

(g) Sei

$$A_{\text{add}} = \{a\#b\#c \mid a, b, c \in \{0,1\}^*, 1 \leq |a| = |b| \leq |c|, \mathrm{nat}_2(a) + \mathrm{nat}_2(b) = \mathrm{nat}_2(c)\}.$$

Welche der Aussagen sind richtig?

Wahr	Falsch	
☐	☐	$A_{\text{add}} \cap A_{\text{add}} \in \mathrm{P}$
☐	☐	$A_{\text{add}} A_{\text{add}} \in \mathrm{P}$
☐	☐	$\overline{A_{\text{add}}} \in \mathrm{P}$

(h) Sei $A_1 \leq_{\text{pol}} A_2$.

Wahr	Falsch	
☐	☐	Falls $A_2 \in$ NP, dann auch $A_1 \in$ PSPACE.
☐	☐	Falls $A_2 \in$ NP, dann auch $A_1 \in$ NPSPACE.
☐	☐	Falls $A_2 \in$ P, dann auch $A_1 \in$ NP.
☐	☐	Falls $A_2 \in$ NP, dann auch $A_1 \in$ P.

(i) Alle NP-harten Probleme liegen in NP.

Wahr	Falsch
☐	☐

Aufgabe 2 Seien

$$\text{FB} := \{f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*\}$$
$$\text{TFB} := \{f \in \text{FB} \mid f \text{ ist Turingberechenbar}\}$$

Wir zeigen, dass $|\,\text{FB}\,| > |\,\text{TFB}\,|$ in drei Schritten.

a) Zeige, dass TFB unendlich ist (z.B. durch die Angabe einer unendlichen Menge Turingberechenbarer Funktionen aus TFB), also dass gilt $|\,\text{TFB}\,| \geq |\mathbb{N}|$.

b) Argumentiere, dass TFB abzählbar ist, also dass gilt $|\,\text{TFB}\,| \leq |\mathbb{N}|$.

c) Zeige mittels Diagonalisierung, dass $|\,\text{FB}\,| > |\{0,1\}^*|$.

d) Schlussfolgere nun $|\,\text{FB}\,| > |\,\text{TFB}\,|$, unter Annahme dass $|\{0,1\}^*| = |\mathbb{N}|$.

Hinweis: Wie bereits in den Übungen und Hausaufgaben verwenden wir $|A|$ für $\text{card}(A)$ (vgl. Definition 0.2.2 und Bemerkung 0.2.3 in der Formelsammlung).

Aufgabe 3

Sei A_3 wie folgt gegeben:

$$A_3 = \{x\#w \in A_{\mathrm{U}} \mid w^{-1} \in \mathrm{L}(M_x)\}$$

Achtung: im Folgenden muss nur (1) oder (2) bearbeitet werden!

(1) Zeige die Unentscheidbarkeit von A_3 entweder mittels Diagonalisierung;

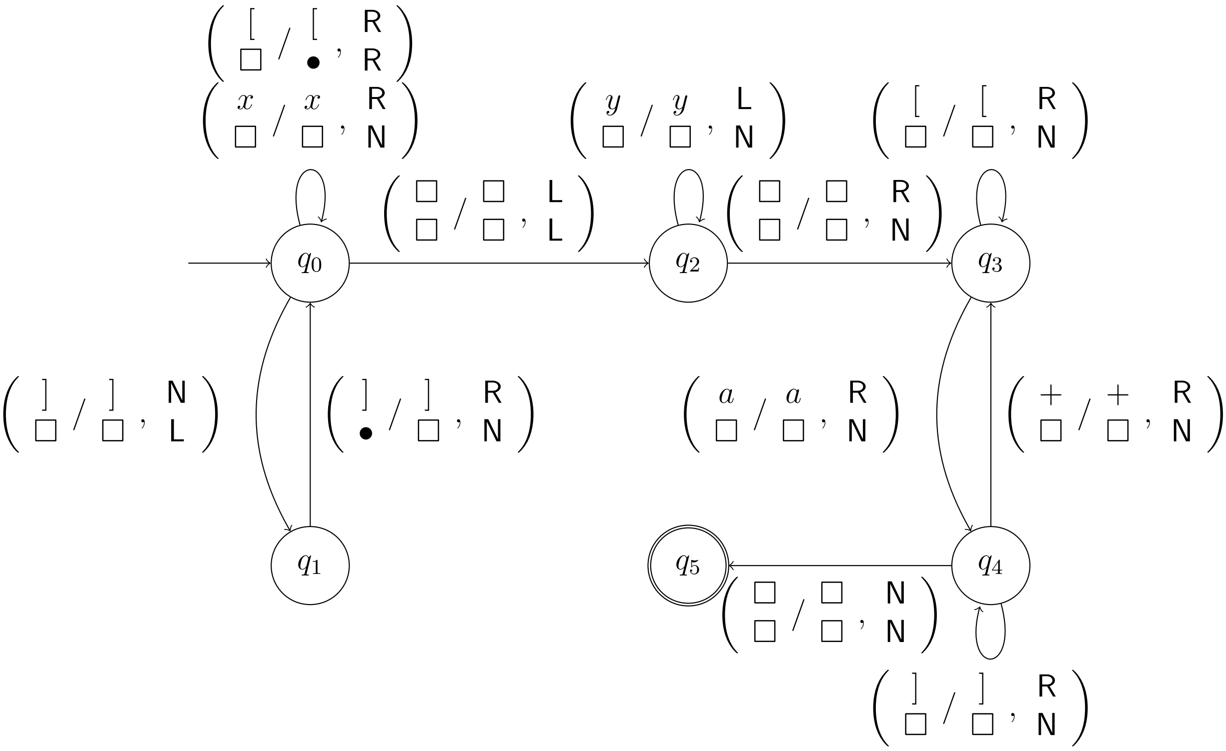
(2) oder begründe die Unentscheidbarkeit von A_3 mit Reduktion.
Im Fall (2) (also sofern Reduktion verwendet wird), gelten folgende Hinweise:

- Verwende dazu die Sprache A_{L} aus der Formelsammlung.
- Die Korrektheit der angegebenen Reduktion ist nachzuweisen.
- Für die Reduktion zu konstruierende Turingmaschinen müssen nicht formal angegeben, sondern können auch textuell oder graphisch beschrieben werden, sofern die Beschreibung präzise, eindeutig und vollständig erfolgt.
- Die Church-Turing-These darf verwendet werden, sofern die intuitive Berechenbarkeit an der entsprechende Stelle eindeutig ist.

Matrikelnummer:

Aufgabe 4

Seien $\Sigma_4 = \{a, [,], +\}$ und $M_4 = (\{q_0, q_1, \ldots, q_5\}, \Sigma_4, \Sigma_4 \cup \{\Box, \bullet\}, \Box, 2, \delta_4, q_0, \{q_5\})$ wobei δ_4 durch den nachfolgenden Graphen gegeben sei (wobei $x \in \{a, +\}$, $y \in \Sigma_4$).



a) Ergänze die folgende Tabelle:

$\|w\|$	w	$\mathrm{dtime}_{M_4}(w)$	$\mathrm{dspace}_{M_4}(w)$	$w \in \mathrm{L}(M_4)$
0	λ	2	4	$-$
1	a	6	5	$\surd$
2	$a+$	8		$-$
2	$[a$		5	$-$
3	$[a]$	13	8	$\surd$
3	$a+a$			$\surd$
4	$[a]+$		9	$-$
4	$[[\,]]$	14		$-$
4	$[\,][\,]$	13	9	$-$
4	$[\,]+a$	12	9	$-$
5	$[[a]]$			$\surd$
6	$[[a]]+$			$-$

$\surd$: Es gilt $w \in \mathrm{L}(M_4)$

$-$: Es gilt: $w \notin \mathrm{L}(M_4)$

Hinweis: Durch das Überprüfen bereits eingetragener Werte kann man versuchen, systematische Fehler beim Zählen auszuschließen.

Bitte wenden!

b) Gib dTime_{M_4} an. Begründe Deine Antwort kurz.

c) Gib eine passende obere Schranke $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für den Platzbedarf bei Eingaben der Länge n an, d.h. es soll gelten:

   - $\forall n \in \mathbb{N} : \mathrm{dSpace}_{M_4}(n) \leq s(n)$ und
   - $\mathrm{dSpace}_{M_4} \in \Theta(s)$.

   Begründe Deine Antwort kurz.

Matrikelnummer: Aufgabe: