TheGI 2: Berechenbarkeit und Komplexität

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 10. Oktober 2008

2. Schriftliche Leistungskontrolle (LK 2-b)

Punktzahl In dieser schriftlichen Leistungskontrolle sind 100 Punkte erreichbar. Wer 40 Punkte erreicht, hat die schriftliche Leistungskontrolle bestanden (Note 4.0 oder besser).

Bearbeitungsdauer Die Bearbeitungsdauer beträgt 75 Minuten.

Hilfsmittel Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist die in der Vorlesung verwendete und auf der Vorlesungsseite bereit gestellte „Formelsammlung Sommersemester 2008“. Diese darf keine Notizen enthalten (und sie darf auch während der Klausur nicht als Papier oder Schmierpapier verwendet werden). Eigenes Papier darf *nicht* verwendet werden.

Aufgabenreihenfolge Die gegebene Reihenfolge der Aufgaben orientiert sich an der Themenreihenfolge in der Vorlesung. Es wird daher empfohlen, die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben selbst durch Abschätzung des Aufwands für die einzelnen Aufgaben festzulegen.

- Antworten zu den Aufgaben sind auf demselben Blatt zu geben, auf dem die jeweilige Aufgabenstellung steht. Dabei können beide Seiten der Blätter verwendet werden. Sofern weitere Blätter benötigt werden, werden diese durch uns bereitgestellt. **Lösungen zu verschiedenen Aufgaben sind stets auf unterschiedlichen Blättern abzugeben!**
- Auf jedem abgegebenen Blatt ist die **bearbeitete Aufgabe, Name und Matrikelnummer** anzugeben.
- Antworten oder Teile von Antworten, die mit Rotstift oder Bleistift geschrieben oder nicht eindeutig lesbar sind, werden nicht bewertet.

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	Studiengang:

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4		Σ	Note
Punkte	25	25	25	25		100	
Erreicht							
Korrektor							

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (25 Punkte)

Beantworte **ohne Begründung** die folgenden Aussagen.

Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Aussagen (Zeilen, in denen kein Kreuz gemacht wurde) werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte. Nicht eindeutige Markierungen werden mit Punktabzug gewertet!

(a) Kreuze die richtigen Aussagen an:

Wahr	Falsch	
☐	☐	L ist akzeptierbar $\Rightarrow$ L ist vom Typ 0.
☐	☐	L ist vom Typ 0 $\Rightarrow$ L ist akzeptierbar.

(b) Sei A_1 auf A_2 reduzierbar ($A_1 \leq_{\text{red}} A_2$). Was folgt daraus in Bezug auf die folgenden Aussagen:

Wahr	Falsch	
☐	☐	A_2 entscheidbar $\Rightarrow$ A_1 entscheidbar.
☐	☐	A_1 unentscheidbar $\Rightarrow$ A_2 unentscheidbar.
☐	☐	A_2 nicht akzeptierbar $\Rightarrow$ A_1 nicht akzeptierbar.
☐	☐	A_1 nicht akzeptierbar $\Rightarrow$ A_2 nicht akzeptierbar.
☐	☐	A_1 entscheidbar $\Rightarrow$ A_2 entscheidbar
☐	☐	A_2 unentscheidbar $\Rightarrow$ A_1 unentscheidbar.
☐	☐	A_2 akzeptierbar $\Rightarrow$ A_1 akzeptierbar.

(c) Es gilt $A_1 \leq_{\text{red}} A_2 \;\wedge\; A_2 \leq_{\text{red}} A_3 \;\Rightarrow\; A_1 \leq_{\text{red}} A_3$.

Wahr	Falsch
☐	☐

(d) Sei $A_{\mathrm{H}^S} := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält für das Wort } w\}$ das spezielle Halteproblem. Das spezielle Halteproblem ist auf das Halteproblem reduzierbar.

Wahr	Falsch
☐	☐

(e) Sei $\mathcal{S} := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists a \in \mathbb{N}.\exists b \in \mathbb{N}. f(n) = a \cdot n + b\}$.

Wahr	Falsch	
☐	☐	$A_{\mathcal{S}} := \{w \mid M_w \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\}$ ist entscheidbar.
☐	☐	Wenn $f \in \mathcal{S}$, dann ist f Turingberechenbar.

(f) $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ist turingberechenbar,

Wahr	Falsch	
☐	☐	mit $f(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \text{ ein Anfangsabschnitt der Dezimalbruchentwicklung von } \pi \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
☐	☐	mit $f(w) = \begin{cases} 1 & w \text{ ist ein Palindrom} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
☐	☐	mit $f(w) = \begin{cases} 1 & w \in A_{\mathrm{U}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
☐	☐	mit $f(w) = \begin{cases} 1 & M_w \text{ terminiert bei Eingabe } w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Hinweise:

- Das Komma lassen wir in π der Einfachheit halber weg.
- $A_{\mathrm{U}} = \{0,1\}^*\#\{0,1\}^*$

(g) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist turingberechenbar,

Wahr	Falsch	
☐	☐	mit $g(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls in der Dezimalbruchentwicklung von } \pi \text{ irgendwo mindestens } n\text{-mal hintereinander eine 7 vorkommt.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
☐	☐	mit $g(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 2, 8, 25, 31, 34, 36 \text{ Zusatzzahl 11 Superzahl 3 die Lottozahlen des letzten Wochenende sind.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
☐	☐	mit $g(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 2, 8, 25, 31, 34, 36 \text{ Zusatzzahl 11 Superzahl 3 die Lottozahlen des nächsten Wochenende sind.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(h) Es gilt (wobei e die Euler-Konstante sei):

Wahr	Falsch	
☐	☐	$\mathrm{O}(\frac{1}{6n}n^3) \supset \mathrm{O}(5 \cdot 10^{27} \cdot n \cdot n)$
☐	☐	$\mathrm{O}(2n^2) \supset \mathrm{O}(n^2 \cdot n)$
☐	☐	$\mathrm{O}(n^{3+3}) \subset \mathrm{O}(n^{(2^3)})$
☐	☐	$\mathrm{O}(n^3) \subset \mathrm{O}(n^3 + 2n)$
☐	☐	$\mathrm{O}(n^2 + 4n) \subseteq \mathrm{O}(e^n)$

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (25 Punkte)

Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Zeige mittels Diagonalisierung, dass

$$F := \{X \mid X \subseteq \mathbb{P}\}$$

überabzählbar ist.

Achte auf die Vollständigkeit und Nachvollziehbarkeit Deiner Argumentation.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Sei A_3 wie folgt gegeben:

$$A_3 = \{x\#y \in A_{\mathrm{U}} \mid \mathrm{L}(M_x) \neq \mathrm{L}(M_y)\}$$

Achtung: im Folgenden muss nur (1) oder (2) bearbeitet werden!

(1) Zeige die Unentscheidbarkeit von A_3 entweder mittels Selbstanwendung;
Im Fall (1) (also sofern Selbstanwendung verwendet wird), gelten folgende Hinweise:

- Es darf davon ausgegangen werden, dass es einer Turingmaschine möglich ist, ihre eigene Kodierung auf das Band zu schreiben.

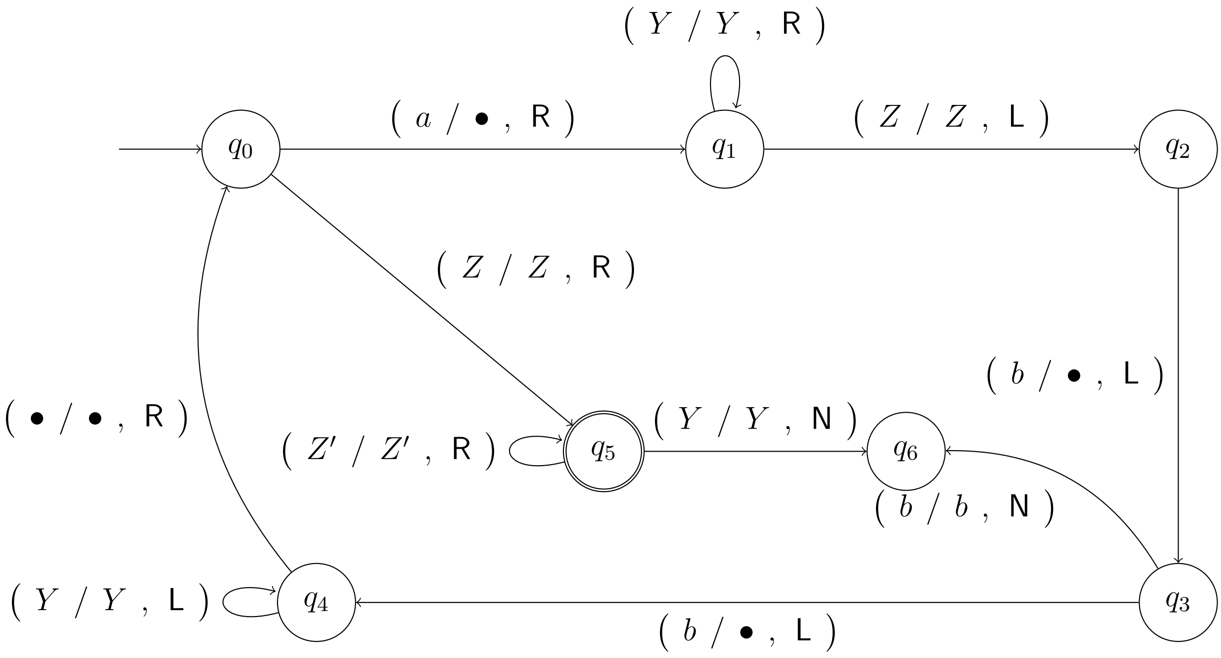
(2) oder begründe die Unentscheidbarkeit von A_3 mit Reduktion.
Im Fall (2) (also sofern Reduktion verwendet wird), gelten folgende Hinweise:

- Verwende dazu die Sprache A_{L} aus der Formelsammlung.
- Die Korrektheit der angegebenen Reduktion ist nachzuweisen.
- Für die Reduktion zu konstruierende Turingmaschinen müssen nicht formal angegeben, sondern können auch textuell oder graphisch beschrieben werden, sofern die Beschreibung präzise, eindeutig und vollständig erfolgt.
- Die Church-Turing-These darf verwendet werden, sofern die intuitive Berechenbarkeit an der entsprechende Stelle eindeutig ist.
- Das in der Vorlesung eingeführte Konstrukt $\mathrm{IGN}_{M,x}$ darf verwendet werden.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Seien $\Sigma_4 = \{a, b, c\}$ und $M_4 = (\{q_0, q_1, \dots, q_6\}, \Sigma_4, \Sigma_4 \cup \{\Box, \bullet\}, \Box, 1, \Delta_4, q_0, \{q_5\})$ wobei Δ_4 durch den Graphen gegeben sei (mit $Y \in \{a, b\}$, $Z \in \{\bullet, \Box, c\}$, $Z' \in \{\bullet, c\}$).



a) (10 Punkte) Ergänze die folgende Tabelle:

$\|w\|$	w	$\mathrm{ntime}_{M_4}(w)$	$\mathrm{nspace}_{M_4}(w)$	
0	λ			$w \in \mathrm{L}(M_4)$
1	a	0	0	$w \notin \mathrm{L}(M_4)$
1	c	1	2	$w \in \mathrm{L}(M_4)$
2	cc	2		$w \in \mathrm{L}(M_4)$
3	abb	9	4	$w \in \mathrm{L}(M_4)$
3	abc			$w \notin \mathrm{L}(M_4)$
3	ccc		4	$w \in \mathrm{L}(M_4)$
4	$abbc$	10	5	$w \in \mathrm{L}(M_4)$
6	$abbccc$			$w \in \mathrm{L}(M_4)$
6	$aabbbb$		7	$w \in \mathrm{L}(M_4)$
8	$aabbbbccc$	27		$w \in \mathrm{L}(M_4)$

Hinweise:

- $\mathrm{L}(M_4) = \{a^n b^{2n} c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
- Durch das Überprüfen bereits eingetragener Werte kann man versuchen, systematische Fehler beim Zählen auszuschließen.

Bitte wenden!

b) (7 Punkte) Gib nSpace_{M_4} an. Begründe Deine Antwort kurz.

c) (8 Punkte) Gib eine passende obere Schranke $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für den Berechnungsaufwand bei Eingaben der Länge n an, d.h. es soll gelten:

- $\forall n \in \mathbb{N} : \mathrm{nTime}_{M_4}(n) \leq s(n)$ und
- $\mathrm{nTime}_{M_4} \in \Theta(s)$.

Begründe Deine Antwort kurz.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Name: Vorname: Matrikelnummer: