TheGI 2: Berechenbarkeit und Komplexität

Veranstalter: Uwe Nestmann, Johannes Borgström, Philipp Küfner

Sommersemester 2008 - 03. Juni 2008

1. Schriftliche Leistungskontrolle

Punktzahl In dieser schriftlichen Leistungskontrolle sind 100 Punkte erreichbar. Wer 40 Punkte erreicht, hat die schriftliche Leistungskontrolle bestanden (Note 4.0 oder besser).

Bearbeitungsdauer Die Bearbeitungsdauer beträgt 75 Minuten.

Hilfsmittel Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist die in der Vorlesung verwendete und auf der Vorlesungsseite bereit gestellte „Formelsammlung Sommersemester 2008“. Diese darf keine Notizen enthalten (und sie darf auch während der Klausur nicht als Papier oder Schmierpapier verwendet werden). Eigenes Papier darf *nicht* verwendet werden.

Aufgabenreihenfolge Die gegebene Reihenfolge der Aufgaben orientiert sich an der Themenreihenfolge in der Vorlesung. Es wird daher empfohlen, die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben selbst durch Abschätzung des Aufwands für die einzelnen Aufgaben festzulegen.

- Antworten zu den Aufgaben sind auf demselben Blatt zu geben, auf dem die jeweilige Aufgabenstellung steht. Dabei können beide Seiten der Blätter verwendet werden. Sofern weitere Blätter benötigt werden, werden diese durch uns bereitgestellt. **Lösungen zu verschiedenen Aufgaben sind stets auf unterschiedlichen Blättern abzugeben!**
- Auf jedem abgegebenen Blatt ist die **bearbeitete Aufgabe, Name und Matrikelnummer** anzugeben.
- Antworten oder Teile von Antworten, die mit Rotstift oder Bleistift geschrieben oder nicht eindeutig lesbar sind, werden nicht bewertet.

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	Studiengang:

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4		Σ	Note
Punkte	25	25	25	25		100	
Erreicht							
Korrektor							

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 1 Sei $\Sigma_1 = \{0, 1, 2\}$ und $\mathrm{ter} : \Sigma_1^* \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung, die eine übergebene Zeichenkette als Zahl zur Basis 3 ("Ternärzahl") auswertet, dabei führende Nullen ignoriert und für λ den Wert 0 zurückliefert ($\mathrm{ter}(\lambda) = 0$).

a) Formuliere mittels Verwendung der Quersumme eine Regel für Teilbarkeit durch 2 für Ternärzahlen (Eine Ternärzahl ist durch 2 teilbar, gdw. ...).

b) Konstruiere entsprechend der aufgestellten Regel einen Endlichen Automaten M_1, der (genau) die Sprache $A_1 = \{w \in \Sigma_1^* \mid \mathrm{ter}(w) \text{ ist durch 2 teilbar}\}$ akzeptiert.

c) Argumentiere, dass gilt $\mathrm{L}(M_1) \subseteq A_1$.

d) Argumentiere, dass gilt $\mathrm{L}(M_1) \supseteq A_1$.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 2 - Kontextfreie Sprachen

Sei $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$ und $A_2 = \{wcw^{-1}u \mid u, w \in \{a, b\}^+\}$.

a) Zeige, dass A_2 nicht regulär ist.

b) Entwirf einen PDA M_2, so dass gilt $\mathrm{L}_{\mathrm{End}}(M_2) = A_2$.

c) Argumentiere, dass gilt $A_2 \subseteq \mathrm{L}_{\mathrm{End}}(M_2)$.

d) Argumentiere, dass gilt $A_2 \supseteq \mathrm{L}_{\mathrm{End}}(M_2)$.

(*Hinweis:* Die Notation $^{-1}$ soll ein Schreiben aller Symbole in umgekehrter Reihenfolge bedeuten, z.B. gilt: falls $w = abc$ ist, so ist $w^{-1} = cba$).

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 3 - Turingmaschinen

Seien

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= \{a, [,], +\} \text{ und} \\ M_3 &= (\{q_0, q_1, \ldots, q_5\}, \Sigma_3, \Sigma_3 \cup \{\Box, \bullet\}, \Box, 2, \delta_3, q_0, \{q_5\}) \end{aligned}$$

wobei δ_3 durch den nachfolgenden Graphen gegeben sei (wobei $x \in \{a, +\}$, $y \in \Sigma_3$).

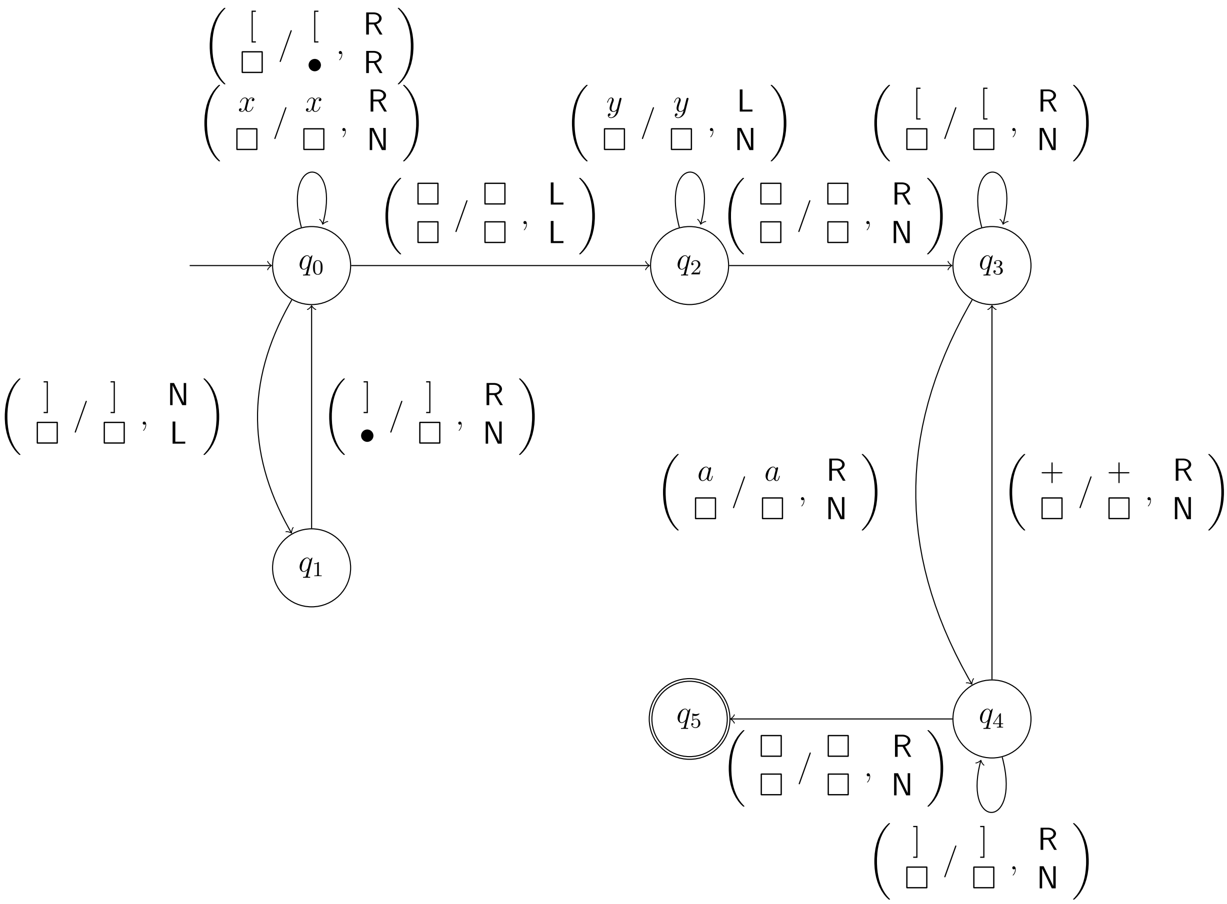
a) Gib eine kontextfreie Grammatik G_3 an, die $\mathrm{L}(M_3)$ generiert.

b) Beschreibe die Arbeitsweise von M_3.

c) Argumentiere, dass gilt $\mathrm{L}(G_3) \subseteq \mathrm{L}(M_3)$.

d) Argumentiere, dass gilt $\mathrm{L}(G_3) \supseteq \mathrm{L}(M_3)$.

(*Hinweis:* Die Maschine durchläuft das Wort zweimal und arbeitet dabei einmal wie ein Kellerautomat und einmal wie ein Endlicher Automat.)



Aufgabe 4 Die Umkehrung einer Sprache A sei wie folgt definiert:

$$A^{-1} = \{w^{-1} \mid w \in A\}.$$

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \square, k, \Delta, q_0, F)$ eine k-Band Turingmaschine. Wie konstruiert man eine Turingmaschine M', so dass gilt:

$$(\mathrm{L}(M))^{-1} = \mathrm{L}(M')?$$

a) Beschreibe textuell, wie M' ausgehend von M zu konstruieren ist.

b) Gib M' formal an.

c) Argumentiere, dass für die TM M' gilt: $(\mathrm{L}(M))^{-1} = \mathrm{L}(M')$

d) Zeige: Die Typ 0 Sprachen sind unter Umkehrung abgeschlossen, d.h. es ist zu zeigen

$$\text{Wenn } A \in \mathcal{L}_0\text{, dann gilt } A^{-1} \in \mathcal{L}_0.$$

Dabei kann ohne Beweis verwendet werden:

- Wenn A eine Typ 0 Sprache ist, existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Turingmaschine M_k mit k Bändern, so dass $\mathrm{L}(M_k) = A$.
- Wenn eine Turingmaschine M existiert, so dass $\mathrm{L}(M) = A$ ist, dann ist A eine Typ 0 Sprache.

Name: Vorname: Matrikelnummer: