TheGI 2: Berechenbarkeit und Komplexität

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 14. Juli 2009

2. Schriftliche Leistungskontrolle (EK)

Punktzahl In dieser schriftlichen Leistungskontrolle sind 100 Punkte erreichbar. Wer 40 Punkte erreicht, hat die schriftliche Leistungskontrolle bestanden (Note 4.0 oder besser).

Bearbeitungsdauer Die Bearbeitungsdauer beträgt 75 Minuten. Ihr erhaltet zudem 15 weitere Minuten für das Lesen der Aufgabenstellung und das Beschriften der ausgeteilten Zettel mit Eurem Namen und Eurer Matrikelnummer.

Hilfsmittel Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist die in der Vorlesung verwendete und auf der Vorlesungsseite bereit gestellte „Formelsammlung". Diese darf keine Notizen enthalten (und sie darf auch während der Klausur nicht als Papier oder Schmierpapier verwendet werden). Eigenes Papier darf *nicht* verwendet werden.

Aufgabenreihenfolge Die gegebene Reihenfolge der Aufgaben orientiert sich an der Themenreihenfolge in der Vorlesung. Es wird daher empfohlen, die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben selbst durch Abschätzung des Aufwands für die einzelnen Aufgaben festzulegen.

- Antworten zu den Aufgaben sind auf demselben Blatt zu geben, auf dem die jeweilige Aufgabenstellung steht. Dabei können beide Seiten der Blätter verwendet werden. Sofern weitere Blätter benötigt werden, werden diese durch uns bereitgestellt. **Lösungen zu verschiedenen Aufgaben sind stets auf unterschiedlichen Blättern abzugeben!**
- Auf jedem abgegebenen Blatt ist die **bearbeitete Aufgabe, Name und Matrikelnummer** anzugeben.
- Antworten oder Teile von Antworten, die mit Rotstift oder Bleistift geschrieben oder nicht eindeutig lesbar sind, werden nicht bewertet. Es sind nur dokumentenechte Stifte zugelassen.

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	Studiengang:
(Tutorin/Tutor:)	

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5		Σ	Note
Punkte	10	25	30	20	15		100	
Erreicht								
Korrektor								

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Beantworte **ohne Begründung** die folgenden Aussagen.

Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz gibt es einen Punkt Abzug. Insgesamt gibt es auf diese Aufgabe mindestens null Punkte.
Nicht eindeutige Markierungen werden mit Punktabzug gewertet!

(a) Gegeben sei das Alphabet $\mathcal{A} = \{\, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \# \,\}$. Welche der folgenden Funktionen sind [Turing-] berechenbar?

- ☐ $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(n_1, n_2)$ ist der größte gemeinsame Teiler von n_1 und n_2.
- ☐ $g : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ mit $g(w) = \begin{cases} \mathtt{0} & \text{, falls } w \in A_{\mathrm{L}} \\ \mathtt{1} & \text{, falls } w \notin A_{\mathrm{L}} \end{cases}$.
- ☐ $h : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ mit $h(w) = w\#w^{-1}$.

(b) Sei A eine akzeptierbare Sprache und A_S eine Teilmenge von A, d.h. $A_S \subseteq A$. Dann ist A_S immer akzeptierbar.

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

(c) Seien $\mathcal{A}$ ein beliebiges Alphabet, $A \subseteq \mathcal{A}^*$ eine beliebige entscheidbare Sprache und $B \subseteq \mathcal{A}^*$ eine beliebige semi-entscheidbare Sprache. Was gilt dann für $A \setminus B$?

- ☐ $A \setminus B$ ist entscheidbar.
- ☐ $A \setminus B$ ist akzeptierbar.
- ☐ $A \setminus B$ ist im Allgemeinen weder entscheidbar noch akzeptierbar.

(d) Seien $\mathcal{A}$ ein beliebiges Alphabet und $A \subseteq \mathcal{A}^*$ eine beliebige semi-entscheidbare Sprache, deren Komplement $\overline{A}$ ebenfalls semi-entscheidbar ist. Dann ist A entscheidbar.

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

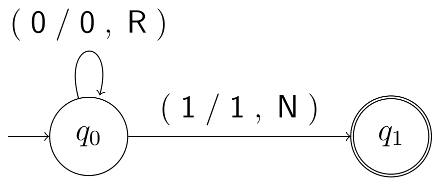
(e) Sei $\mathcal{A}$ ein Eingabealphabet. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- ☐ Akzeptierer müssen für alle Eingaben aus $\mathcal{A}^*$ terminieren.
- ☐ Entscheider müssen für alle Eingaben aus $\mathcal{A}^*$ terminieren.
- ☐ Akzeptierer müssen für alle Eingaben aus der zu akzeptierenden Sprache in einem Endzustand terminieren.
- ☐ Entscheider müssen für alle Eingaben aus $\mathcal{A}^*$ in einem Endzustand terminieren.

(f) Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- ☐ $\mathrm{O}(n^2) \subset \mathrm{O}(2^n)$
- ☐ Für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = n^3$ gilt $f \in \mathrm{O}(24n^2)$.
- ☐ Für $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(n) = \frac{1}{2}n$ gilt $g \in \mathrm{O}(2^n)$.
- ☐ Für $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $h(n) = \frac{1}{2}n^2$ gilt $h \in \mathrm{O}(n)$.

(g) Gegeben sei die DTM $M = (\{ q_0, q_1 \}, \{ \mathsf{0}, \mathsf{1} \}, \{ \mathsf{0}, \mathsf{1}, \Box \}, \Box, 1, \delta, q_0, \{ q_1 \})$, wobei δ durch den folgenden Graphen gegeben ist:



$\forall w \in \{ \mathsf{0}, \mathsf{1} \}^*.\ \mathrm{dspace}_M(w) \leq |w|.$

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

Aufgabe 2 **(25 Punkte)**

Beweise **nur** mit Hilfe von Diagonalisierung, das die Menge aller (unendlichen) Zufallsfolgen über $\{0, 1\}$, d.h. das die Menge

$$X \triangleq \{\, x_0x_1x_2x_3 \ldots \mid \forall i \in \mathbb{N}.\ x_i \in \{0, 1\} \,\},$$

überabzählbar ist.

Hinweis: Eine Zufallsfolge entsteht zum Beispiel dadurch, dass man eine Münze unendlich oft wirft und für jedes Mal Kopf eine 0 und für jedes Mal Zahl eine 1 notiert. X ist die Menge aller möglichen Zufallsfolgen, die auf diese Art entstehen könnten.

Um die i'te Stelle der Zufallsfolge $y = x_0x_1x_2x_3 \ldots$ zu benennen, könnt ihr die Funktion $(y)_i$ benutzen, d.h. $(y)_i = x_i$.

Aufgabe 3 **(30 Punkte)**

Sei A_3 wie folgt gegeben:

$$A_3 = \{\, x \in \{\, \mathtt{0}, \mathtt{1} \,\}^* \mid \mathtt{0} \in \mathrm{L}(M_x) \,\}$$

Achtung: im Folgenden muss nur (1) oder (2) bearbeitet werden!

(1) Zeige die Unentscheidbarkeit von A_3 entweder mittels Selbstanwendung;
Im Fall (1) (also sofern Selbstanwendung verwendet wird), gelten folgende Hinweise:

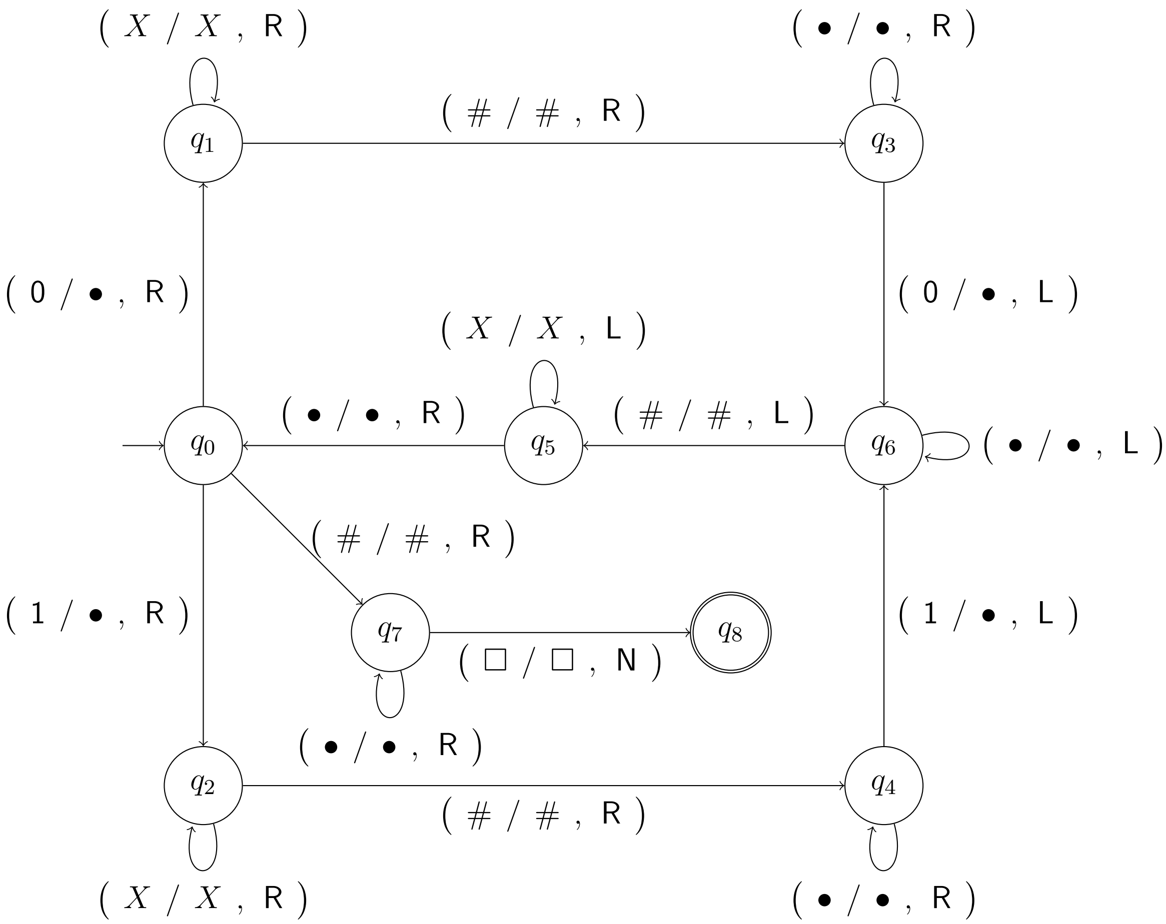
- Es darf davon ausgegangen werden, dass es einer Turingmaschine möglich ist, ihre eigene Kodierung auf das Band zu schreiben.

(2) oder begründe die Unentscheidbarkeit von A_3 mit Reduktion.
Im Fall (2) (also sofern Reduktion verwendet wird), gelten folgende Hinweise:

- Verwende dazu die Sprache A_{L} aus der Formelsammlung.
- Das in der Vorlesung eingeführte Konstrukt $\mathrm{IGN}_{M,x}$ darf verwendet werden. $\mathrm{IGN}_{M,x}$ beschreibt dabei eine Maschine, die zunächst das Eingabewort löscht, x auf das Band schreibt und dann M auf der Eingabe x simuliert, d.h. genau dann akzeptiert, wenn M bei Eingabe x akzeptiert.
- Die Korrektheit der angegebenen Reduktion ist nachzuweisen.
- Die Church-Turing-These darf verwendet werden, sofern die intuitive Berechenbarkeit an der entsprechende Stelle eindeutig ist.
- Für die Reduktion zu konstruierende Turingmaschinen müssen nicht formal angegeben, sondern können auch textuell oder graphisch beschrieben werden, sofern die Beschreibung präzise, eindeutig und vollständig erfolgt.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Sei $\mathcal{A}_4 = \{\, \mathsf{0}, \mathsf{1}, \# \,\}$ und $M_4 = (\{\, q_i \mid i \in [0,8] \,\}, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_4 \cup \{\, \bullet, \square \,\}, \square, 1, \Delta_4, q_0, \{q_8\})$ wobei Δ_4 durch den Graphen gegeben sei (mit $X \in \{\, \mathsf{0}, \mathsf{1} \,\}$):



Bitte wenden!

Name: Vorname: Matrikelnummer:

1. Gib in der nachfolgenden Tabelle für die vorgegeben Worte an den fehlenden Stellen jeweils dtime_{M_4} und dspace_{M_4} sowie ntime_{M_4} und nspace_{M_4} an.

w	$\mathrm{dtime}_{M_4}(w)$	$\mathrm{dspace}_{M_4}(w)$	$\mathrm{ntime}_{M_4}(w)$	$\mathrm{nspace}_{M_4}(w)$
λ				
0	1	2		
#	2	2		
1#				
#1		2		
##		2		
0#0				
1#0	2	3		
01#0	10	5		
0#01	7	4		
10#10				
11#10	10			
110#11	22	7		
110#110	32			

2. Gib eine passende obere Schranke $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für den Berechnungsaufwand bei Eingaben der Länge n an, d.h. es soll gelten:
   - $\forall n \in \mathbb{N} : \mathrm{dTime}_{M_4}(n) \leq s(n)$ und
   - $\mathrm{dTime}_{M_4} \in \Theta(s)$.
3. Gib die Funktion $\mathrm{nSpace}_{M_4}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Sei $\mathcal{A}_5 = \{ \mathtt{0}, \mathtt{1}, \# \}$ und sei die Sprache $A_4 \subseteq \mathcal{A}_5^*$ definiert als

$$A_4 = \{ w \in A_U \mid \exists w' \in \{ \mathtt{0}, \mathtt{1} \}^*.\ w = w'\#w' \}$$

1. Welches ist das kleinste k, für das gilt $A_4 \in \mathrm{DTIME}(n^k)$? Weise die Korrektheit Deiner Antwort nach.

   Dabei ist zu beachten:

   - Für eine angegebene TM M, die eine Sprache A erkennen soll, darf ohne Nachweis $\mathrm{L}(M) = A$ vorausgesetzt werden.
   - Für eine angegebene TM M, mit $\mathrm{dTime}_M \in \mathrm{O}(n^i)$ darf ohne Nachweis $\mathrm{dTime}_M \in \mathrm{O}(n^i)$ vorausgesetzt werden.
   - Für alle angegebenen Turingmaschinen dürfen jeweils nicht mehr als 8 Zustände und 2 Bänder verwendet werden.
   - Für alle angegebenen Turingmaschinen muss zusätzlich eine verständliche Beschreibung angegeben werden.

   Allerdings ist mit sehr hohen Punktabzügen zu rechnen falls $\mathrm{L}(M) = A_4$ vorausgesetzt wird, aber $\mathrm{L}(M) \neq A_4$ gilt bzw. $\mathrm{dTime}_M \in \mathrm{O}(n^i)$ vorausgesetzt wird, aber $\mathrm{dTime}_M \notin \mathrm{O}(n^i)$ gilt.

2. Für welche $X \in \{ \mathrm{P}, \mathrm{NP} \}$ gilt $A_4 \in X$? Begründe Deine Antwort kurz.

Name: Vorname: Matrikelnummer: