TheGI 2: Berechenbarkeit und Komplexität

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 09. Oktober 2009

2. Schriftliche Leistungskontrolle (EK-N)

Punktzahl In dieser schriftlichen Leistungskontrolle sind 100 Punkte erreichbar. Wer 40 Punkte erreicht, hat die schriftliche Leistungskontrolle bestanden (Note 4.0 oder besser).

Bearbeitungsdauer Die Bearbeitungsdauer beträgt 75 Minuten. Ihr erhaltet zudem 15 weitere Minuten für das Lesen der Aufgabenstellung und das Beschriften der ausgeteilten Zettel mit Eurem Namen und Eurer Matrikelnummer.

Hilfsmittel Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist die in der Vorlesung verwendete und auf der Vorlesungsseite bereit gestellte „Formelsammlung". Diese darf keine Notizen enthalten (und sie darf auch während der Klausur nicht als Papier oder Schmierpapier verwendet werden). Eigenes Papier darf *nicht* verwendet werden.

Aufgabenreihenfolge Die gegebene Reihenfolge der Aufgaben orientiert sich an der Themenreihenfolge in der Vorlesung. Es wird daher empfohlen, die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben selbst durch Abschätzung des Aufwands für die einzelnen Aufgaben festzulegen.

- Antworten zu den Aufgaben sind auf demselben Blatt zu geben, auf dem die jeweilige Aufgabenstellung steht. Dabei können beide Seiten der Blätter verwendet werden. Sofern weitere Blätter benötigt werden, werden diese durch uns bereitgestellt. **Lösungen zu verschiedenen Aufgaben sind stets auf unterschiedlichen Blättern abzugeben!**
- Auf jedem abgegebenen Blatt ist die **bearbeitete Aufgabe, Name und Matrikelnummer** anzugeben.
- Antworten oder Teile von Antworten, die mit Rotstift oder Bleistift geschrieben oder nicht eindeutig lesbar sind, werden nicht bewertet. Es sind nur dokumentenechte Stifte zugelassen.

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	Studiengang:
(Tutorin/Tutor:)	

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5		Σ	Note
Punkte	10	25	30	20	15		100	
Erreicht								
Korrektor								

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Beantworte **ohne Begründung**:

Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz gibt es einen Punkt Abzug. Insgesamt gibt es auf diese Aufgabe mindestens null Punkte.
Nicht eindeutige Markierungen werden mit Punktabzug gewertet!

(a) Gegeben sei das Alphabet $\mathcal{A} = \{\, \mathsf{0}, \mathsf{1}, \# \,\}$. Welche der folgenden Funktionen sind [Turing-] berechenbar?

☐ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = \begin{cases} 0 & \text{, falls es am 25.10.2009 regnet} \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}$

☐ $g : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ mit $g(w) = \begin{cases} \mathsf{0} & \text{, falls } w \in A_{\mathrm{H}} \\ \mathsf{1} & \text{, falls } w \notin A_{\mathrm{H}} \end{cases}$

☐ $h : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ mit $h(w) = \begin{cases} \mathsf{0} & \text{, falls } w \in A_{\mathrm{U}} \\ \mathsf{1} & \text{, falls } w \notin A_{\mathrm{U}} \end{cases}$

Hinweis: $A_{\mathrm{U}} \triangleq \{\, \mathsf{0}, \mathsf{1} \,\}^* \circ \{\, \# \,\} \circ \{\, \mathsf{0}, \mathsf{1} \,\}^*$

(b) Sei A eine endliche Sprache ($\#(A) \neq \infty$) und A_S eine Teilmenge von A, d.h. $A_S \subseteq A$. Dann ist A_S

☐ akzeptierbar.
☐ entscheidbar.
☐ regulär.

(c) A_{H} ist akzeptierbar.

☐ Wahr
☐ Falsch

(d) Sei $\mathcal{A}$ ein (endliches) Alphabet und B eine nicht akzeptierbare Sprache über $\mathcal{A}$. Dann ist die Sprache $B \cup \overline{B}$ akzeptierbar.

☐ Wahr.
☐ Falsch.

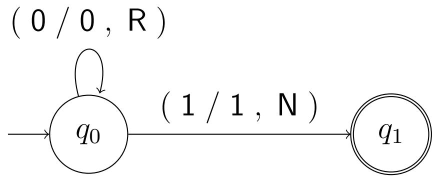
(e) Sei A eine entscheidbare Sprache und A_s eine Teilmenge von A ($A_s \subseteq A$). Dann ist auch A_s immer entscheidbar.

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

(f) Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- ☐ $\mathrm{O}(n^2) \subset \mathrm{O}(2n^2)$
- ☐ Für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = n^3$ gilt $f \in \mathrm{O}(24n^5)$.
- ☐ Für $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(n) = 2^n$ gilt $g \in \mathrm{O}(1000n^2)$.
- ☐ Für $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $h(n) = 2n^4$ gilt $h \in \mathrm{O}(5n^3)$.

(g) Gegeben sei die ETM $M = (\{ q_0, q_1 \}, \{ 0, 1 \}, \{ 0, 1, \Box \}, \Box, 1, \delta, q_0, \{ q_1 \})$, wobei δ durch den folgenden Graphen gegeben ist:



$\forall w \in \{ 0, 1 \}^*.\ \mathrm{dtime}_M(w) \leq |w|$.

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

Aufgabe 2 **(25 Punkte)**

Sei $\mathcal{A} = \{\, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \,\}$. Beweise **nur** mit Hilfe von Diagonalisierung, dass die Menge

$$M \triangleq \{\, g : \mathbb{N} \to \mathcal{A} \,\},$$

also die Menge aller (totalen) Abbildungen vom Typ $\mathbb{N} \to \{\, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \,\}$ überabzählbar ist.

Hinweis: In Widerspruchsbeweisen muss der Widerspruch explizit und eindeutig hergeleitet werden. Ein Satz der Form "Diese Zeile kommt in dem angegebenen Abzählschema nicht vor, da es sich in mindestens einer Stelle von jeder Zeile unterscheidet." ist so nicht ausreichend und muss im Detail gezeigt werden.

Aufgabe 3 **(30 Punkte)**

Sei $\mathcal{A} = \{\, \mathtt{0}, \mathtt{1} \,\}$ und sei A_3 wie folgt gegeben:

$$A_3 = \{\ x\#y \in A_{\mathrm{U}} \mid (\mathrm{L}(M_x) \cup \mathrm{L}(M_y)) = \mathcal{A}^*\ \}$$

Hinweis: Da $\mathrm{L}(M^{\mathrm{triv}}) = \emptyset$ gelten folgende Aussagen:

- $(\mathrm{L}(M^{\mathrm{triv}}) \cup \mathrm{L}(M)) = \mathrm{L}(M)$
- $(\mathrm{L}(M^{\mathrm{triv}}) \cup \mathrm{L}(M)) = \mathcal{A}^*$ gdw. $\mathrm{L}(M) = \mathcal{A}^*$

Achtung: im Folgenden muss nur (1) oder (2) bearbeitet werden!

(1) Zeige die Unentscheidbarkeit von A_3 entweder mittels Selbstanwendung;
Im Fall (1) (also sofern Selbstanwendung verwendet wird), gelten folgende Hinweise:

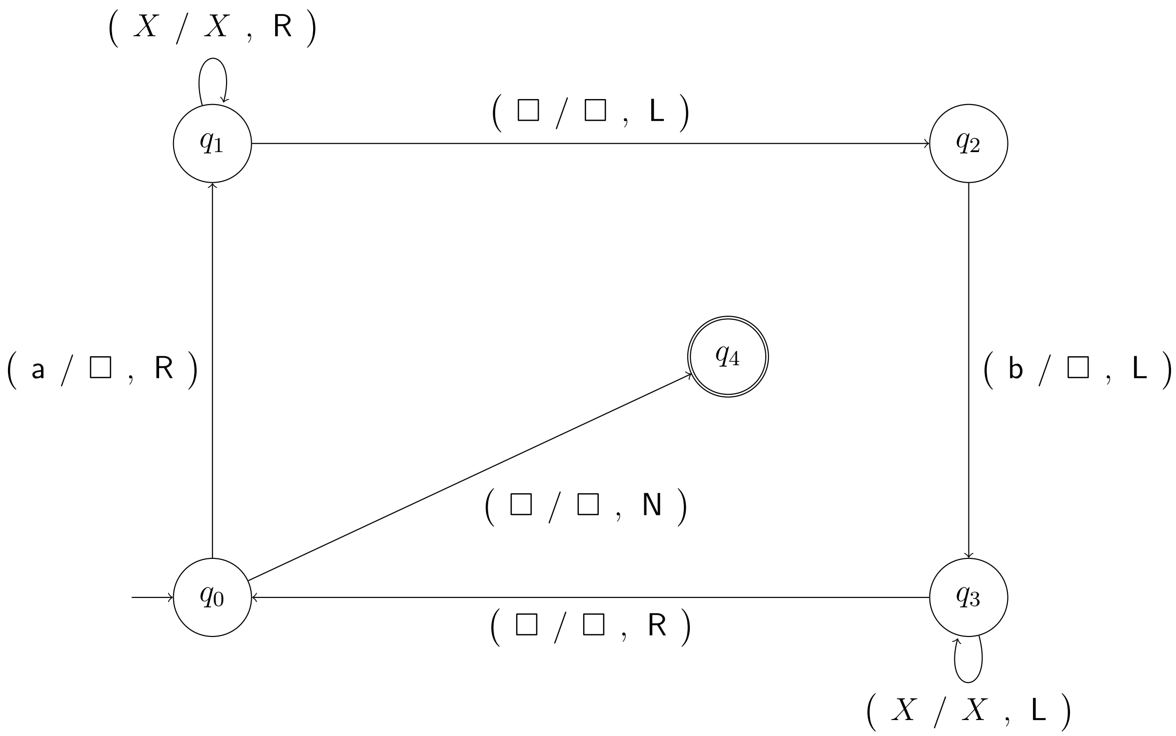
- Es darf davon ausgegangen werden, dass es einer Turingmaschine möglich ist, ihre eigene Kodierung auf das Band zu schreiben.

(2) oder begründe die Unentscheidbarkeit von A_3 mit Reduktion.
Im Fall (2) (also sofern Reduktion verwendet wird), gelten folgende Hinweise:

- Verwende dazu die Sprache A_{L} aus der Formelsammlung.
- Das in der Vorlesung eingeführte Konstrukt $\mathrm{IGN}_{M,x}$ darf verwendet werden. $\mathrm{IGN}_{M,x}$ beschreibt dabei eine Maschine, die zunächst das Eingabewort löscht, x auf das Band schreibt und dann M auf der Eingabe x simuliert, d.h. genau dann akzeptiert, wenn M bei Eingabe x akzeptiert.
- Die Korrektheit der angegebenen Reduktion ist nachzuweisen.
- Die Church-Turing-These darf verwendet werden, sofern die intuitive Berechenbarkeit an der entsprechenden Stelle eindeutig ist.
- Für die Reduktion zu konstruierende Turingmaschinen müssen nicht formal angegeben, sondern können auch textuell oder graphisch beschrieben werden, sofern die Beschreibung präzise, eindeutig und vollständig erfolgt.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Sei $\mathcal{A}_4 = \{\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \,\}$ und $M_4 = (\{\, q_i \mid i \in [0,4] \,\}, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_4 \cup \{\, \square \,\}, \square, 1, \Delta_4, q_0, \{q_4\})$ wobei Δ_4 durch den Graphen gegeben sei (mit $X \in \{\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \,\}$):



Bitte wenden!

Name: Vorname: Matrikelnummer:

1. Gib in der nachfolgenden Tabelle für die vorgegeben Worte an den fehlenden Stellen jeweils dtime_{M_4} und dspace_{M_4} sowie ntime_{M_4} und nspace_{M_4} an.

w	$\text{dtime}_{M_4}(w)$	$\text{dspace}_{M_4}(w)$	$\text{ntime}_{M_4}(w)$	$\text{nspace}_{M_4}(w)$
λ				
a	2	2		
b	0	1		
aa				
ba		2		
ab		3		
aab	9			
bab	0	3		
aabb	15	5		
abab	9	5		
aabaa				
aabbb	18			
aaabb		6		
aaabbb	28			

2. Gib eine passende obere Schranke $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für den Berechnungsaufwand bei Eingaben der Länge n an, d.h. es soll gelten:
   - $\forall n \in \mathbb{N} : \text{dTime}_{M_4}(n) \leq s(n)$ und
   - $\text{dTime}_{M_4} \in \Theta(s)$.
3. Gib die Funktion $\text{nSpace}_{M_4}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an.

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Sei $\mathcal{A}_5 = \{\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \,\}$ und sei die Sprache $A_4 \subseteq \mathcal{A}_5^*$ definiert als

$$A_4 = \{\ w \in \mathcal{A}_5^* \mid \exists n \in \mathbb{N}.\ w = \mathsf{a}^n \mathsf{b}^n\ \}$$

1. Welches ist das kleinste k, für das gilt $A_4 \in \mathrm{DTIME}(n^k)$? Weise die Korrektheit Deiner Antwort nach.

   Für jede Turingmaschine M, die Du zum Nachweis verwendest gilt:

   - Für die Argumentation verwendete Aussagen der Form $\mathrm{L}(M) = A$ und $\mathrm{dTime}_M \in \mathrm{O}(n^i)$ müssen nicht bewiesen werden. Es gibt jedoch Punktabzüge für falsche Aussagen dieser Art.
   - M darf nicht mehr als 6 Zustände und 2 Bänder besitzen.
   - zusätzlich zur formalen Darstellung von M muss eine verständliche Beschreibung für M angegeben werden.

2. Für welche $X \in \{\, \mathrm{P}, \mathrm{NP} \,\}$ gilt $A_4 \in X$? Begründe Deine Antwort kurz.

Name: Vorname: Matrikelnummer: