TheGI 2: Berechenbarkeit und Komplexität

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 09. Oktober 2009

1. Schriftliche Leistungskontrolle (ZK-N)

Punktzahl In dieser schriftlichen Leistungskontrolle sind 100 Punkte erreichbar. Wer 40 Punkte erreicht, hat die schriftliche Leistungskontrolle bestanden (Note 4.0 oder besser).

Bearbeitungsdauer Die Bearbeitungsdauer beträgt 75 Minuten. Ihr erhaltet zudem 15 weitere Minuten für das Lesen der Aufgabenstellung und das Beschriften der ausgeteilten Zettel mit Eurem Namen und Eurer Matrikelnummer.

Hilfsmittel Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist die in der Vorlesung verwendete und auf der Vorlesungsseite bereit gestellte „Formelsammlung". Diese darf keine Notizen enthalten (und sie darf auch während der Klausur nicht als Papier oder Schmierpapier verwendet werden). Eigenes Papier darf *nicht* verwendet werden.

Aufgabenreihenfolge Die gegebene Reihenfolge der Aufgaben orientiert sich an der Themenreihenfolge in der Vorlesung. Es wird daher empfohlen, die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben selbst durch Abschätzung des Aufwands für die einzelnen Aufgaben festzulegen.

- Antworten zu den Aufgaben sind auf demselben Blatt zu geben, auf dem die jeweilige Aufgabenstellung steht. Dabei können beide Seiten der Blätter verwendet werden. Sofern weitere Blätter benötigt werden, werden diese durch uns bereitgestellt. **Lösungen zu verschiedenen Aufgaben sind stets auf unterschiedlichen Blättern abzugeben!**
- Auf jedem abgegebenen Blatt ist die **bearbeitete Aufgabe, Name und Matrikelnummer** anzugeben.
- Antworten oder Teile von Antworten, die mit Rotstift oder Bleistift geschrieben oder nicht eindeutig lesbar sind, werden nicht bewertet. Es sind nur dokumentenechte Stifte zugelassen.

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	Studiengang:
(Tutorin/Tutor:)	

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5		Σ	Note
Punkte	10	21	17	20	32		100	
Erreicht								
Korrektor								

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Beantworte **ohne Begründung** die folgenden Fragen.

Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz gibt es einen Punkt Abzug. Insgesamt gibt es auf diese Aufgabe mindestens null Punkte.
Nicht eindeutige Markierungen werden mit Punktabzug gewertet!

(a) Gegeben seien das Alphabet $\mathcal{A} = \{\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \,\}$ und die endlichen Automaten $M_1 = (\{\, q_0 \,\}, \mathcal{A}, \emptyset, \{\, q_0 \,\}, \{\, q_0 \,\})$ und $M_2 = (\{\, q_0 \,\}, \mathcal{A}, \emptyset, \{\, q_0 \,\}, \emptyset)$. Welche der folgenden Aussagen gelten?

- ☐ $\mathrm{L}(M_1) = \emptyset$
- ☐ $\mathrm{L}(M_1) = \{\, \lambda \,\}$
- ☐ $\mathrm{L}(M_2) = \emptyset$
- ☐ $\mathrm{L}(M_2) = \{\, \lambda \,\}$

(b) Gegeben seien die regulären Sprachen $A_1 = \{\, \mathsf{a}^n \mathsf{b}^m \mid n, m \in \mathbb{N} \,\}$ und $A_2 = \{\, \mathsf{0}^m \mathsf{1}^n \mid n, m \in \mathbb{N} \,\}$. Für welche der folgenden Worthomomorphismen h (mit $h : \{\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \,\}^* \to \{\, \mathsf{0}, \mathsf{1} \,\}^*$) gilt $h(A_1) = A_2$?

- ☐ $h(0) = a, h(1) = b$
- ☐ $h(0) = b, h(1) = a$
- ☐ $h(a) = 0, h(b) = 1$
- ☐ $h(a) = 1, h(b) = 0$

(c) Welche der folgenden Aussagen gelten?

- ☐ Jede endliche Sprache ist regulär.
- ☐ Jede reguläre Sprache ist endlich.
- ☐ Jede nicht reguläre Sprache ist nicht endlich.

(d) Sei M_2 mit $\mathrm{L}(M_2) = A_2$ ein beliebiger PDA, M_0 mit $\mathrm{L}(M_0) = A_0$ eine beliebige TM und M_3 mit $\mathrm{L}(M_3) = A_3$ ein beliebiger DFA. Welche der folgenden Aussagen gelten?

- ☐ $A_2 \cup A_0$ ist akzeptierbar.
- ☐ $A_2 \cap A_0$ ist kontextfrei.
- ☐ $A_2 \setminus A_3$ ist kontextfrei.

(e) Die TM $M = (Q, \mathcal{A}, \Gamma, \Box, k, \emptyset, q_0, F)$ akzeptiert eine reguläre Sprache.

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

(f) Ein Wort w gehört genau dann zur Sprache einer TM M, wenn die Berechnung von M für w terminiert.

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

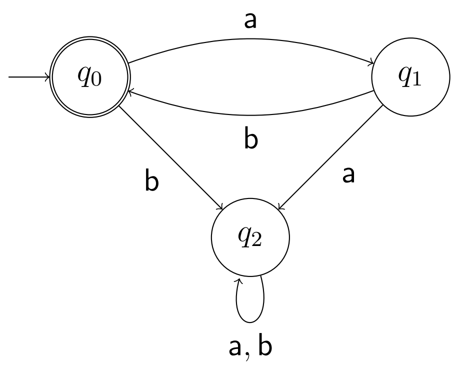
(g) Seien A_1 und A_2 akzeptierbare aber nicht kontextfreie Sprachen, dann ist $A_1 \cap A_2$ eine akzeptierbare Sprache.

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 2 **(21 Punkte)**

Gegeben seien das Alphabet $\mathcal{A} = \{\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \,\}$, der DFA $M = (\{\, q_0, q_1, q_2 \,\}, \mathcal{A}, \delta, q_0, \{\, q_0 \,\})$, wobei δ durch den folgenden Graphen gegeben ist:



und das Lemma **L1**:

$$\forall w \in \mathcal{A}^*.\ P(w)$$

mit

$$P(w) \triangleq \widehat{\delta}(q_0, w) = \begin{cases} q_0 & \text{falls } w \in \{\, \mathsf{ab} \,\}^* \\ q_1 & \text{falls } w \in (\{\, \mathsf{ab} \,\}^* \cdot \{\, \mathsf{a} \,\}) \\ q_2 & \text{falls } w \in (\{\, \mathsf{ab} \,\}^* \cdot \{\, \mathsf{aa}, \mathsf{b} \,\} \cdot \{\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \,\}^*) \end{cases}$$

Hinweis: Beachte $\{\, \mathsf{ab} \,\}^* \neq \{\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \,\}^*$; $\{\, \mathsf{ab} \,\}^* = \{\, (\mathsf{ab})^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$. Beachte außerdem, dass die drei Fälle in **L1** disjunkt (verschieden) sind und eine vollständige Fallunterscheidung bilden, d.h. es trifft immer genau ein Fall zu. Kann gezeigt werden, dass ein bestimmter Fall Anwendung findet, so sind die anderen beiden Fälle damit automatisch ausgeschlossen.

1. (3 Punkte) Gib jeweils eine schrittweise Berechnung für die Wörter abab, baab und aaba an.
2. (12 Punkte) Beweise das Lemma **L1** mit Hilfe von Induktion über $w \in \mathcal{A}^*$.
3. (6 Punkte) Beweise mit Hilfe von Lemma **L1**, dass $\mathrm{L}(M) = \{\mathsf{ab}\}^*$.

Achte auf die Vollständigkeit und Nachvollziehbarkeit Deiner Argumentation.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 3 **(17 Punkte)**

1. (10 Punkte) Gegeben seien die Sprachen

$$\begin{aligned} A &= \{\ \mathsf{a}^n\mathsf{b}^m \mid n, m \in \mathbb{N}\ \}\,, \\ B &= \{\ \mathsf{a}^n\mathsf{b}^m \mid n, m \in \mathbb{N} \land n < m\ \} \text{ und} \\ C &= \{\ w \in \{\,\mathsf{a}, \mathsf{b}\,\}^* \mid |w|_{\mathsf{a}} = |w|_{\mathsf{b}}\ \}\,. \end{aligned}$$

   (a) Zeige oder widerlege, dass $A \cap C$ regulär ist.

   (b) Zeige oder widerlege, dass $A \cup B$ regulär ist.

   (c) Zeige oder widerlege, dass $A \cdot A$ regulär ist.

   Hinweise:

   - Um zu zeigen, dass eine Sprache regulär ist, genügt hier die Angabe eines geeigneten Automaten. Es muss nicht gezeigt werden, dass dieser Automat tatsächlich die geforderte Sprache akzeptiert.
   - Es ist nicht nötig eine Beschreibung der Arbeitsweise eines Automaten anzugeben, wenn dieser höchstens 5 Zustände hat.
   - Wenn Ihr eine reguläre Sprache benutzt, zeigt (wieder nur durch Angabe eines Automaten), dass diese Sprache regulär ist.
   - Die Sprache $Z = \{\ \mathsf{a}^n\mathsf{b}^n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$ ist nicht regulär.

2. (7 Punkte) Zeige, dass die regulären Sprachen abgeschlossen sind unter $^+$. Konstruiere dazu aus einem beliebigen NFA $M = (Q, \mathcal{A}, \Delta, S, F)$ einen NFA M_{Plus}, so dass $\mathrm{L}(M_{Plus}) = \mathrm{L}(M)^+$.

   Hinweis: Es muss nicht bewiesen werden, dass tatsächlich $\mathrm{L}(M_{Plus}) = \mathrm{L}(M)^+$ gilt. Eine Erklärung der Konstruktion genügt.

Achte auf die Vollständigkeit und Nachvollziehbarkeit Deiner Argumentation.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Achtung: Die Bandalphabete Γ der im Folgenden anzugebenden PDAs und DPDAs dürfen jeweils nicht mehr als 2 Symbole enthalten, d.h. $\#(\Gamma) \leq 2$.

Gegeben seien das Alphabet $\mathcal{A} = \{ \mathsf{a}, \mathsf{b} \}$ und die deterministisch kontextfreien Sprachen

$$A_1 = \{ \mathsf{a}^n \mathsf{b}^m \mid n, m \in \mathbb{N} \land n > m \} \text{ und}$$
$$A_2 = \{ \mathsf{a}^n \mathsf{b}^m \mid n, m \in \mathbb{N} \land n < m \}.$$

1. (7 Punkte) Gib einen DPDA M_1 an, so dass $\mathrm{L}_{\mathrm{End}}(M_1) = A_1$.
2. (3 Punkte) Argumentiere kurz warum die Sprache A_1 nicht durch einen deterministischen Kellerautomaten akzeptiert werden kann, der mit leerem Keller akzeptiert.
3. (4 Punkte) Ist die Sprache $A_4 = A_1 \cap A_2$ deterministisch kontextfrei? Falls ja, gib einen DPDA M_4 mit $\mathrm{L}_{\mathrm{End}}(A_4) = A_4$ an. Falls nein, gib einen PDA M_4 mit $\mathrm{L}_{\mathrm{End}}(M_4) = A_4$ an und erkläre kurz, an welcher Stelle und warum der Nicht-Determinismus benötigt wird.
4. (6 Punkte) Ist die Sprache $A_3 = A_1 \cup A_2$ deterministisch kontextfrei? Falls ja, gib einen DPDA M_3 mit $\mathrm{L}_{\mathrm{End}}(M_3) = A_3$ an. Falls nein, gib einen PDA M_3 mit $\mathrm{L}_{\mathrm{End}}(M_3) = A_3$ an und erkläre kurz, an welcher Stelle und warum der Nicht-Determinismus benötigt wird.

Hinweis: Es ist nicht nötig eine Beschreibung der Arbeitsweise eines Automaten anzugeben, wenn dieser nicht mehr als 5 Zustände hat.

Achte auf die Vollständigkeit und Nachvollziehbarkeit Deiner Argumentation.

Aufgabe 5 (32 Punkte)

Gegeben seien das Alphabet $\mathcal{A} = \{\, \mathsf{0}, \mathsf{1}, \# \,\}$ und die akzeptierbaren Sprachen

$$D = \left\{\, x\#y\#z \mid x, y, z \in \{\, \mathsf{0}, \mathsf{1} \,\}^* \wedge \left(z = x \vee z = y^{-1}\right) \,\right\} \text{ und}$$
$$E = \left\{\, x\#y\#z \mid x, y, z \in \{\, \mathsf{0}, \mathsf{1} \,\}^* \wedge \left(z = x \vee z \neq y^{-1}\right) \,\right\}.$$

1. (4 Punkte) Zeige oder widerlege nur mit Hilfe von Abschlusseigenschaften und den Sprachen D und E, dass $F = \{\, x\#y\#z \mid x, y, z \in \{\, \mathsf{0}, \mathsf{1} \,\}^* \wedge z = x \,\}$ akzeptierbar ist.

   Hinweis: Falls F akzeptierbar ist, genügt es hier **nicht** einen entsprechenden Automaten anzugeben.

2. (4 Punkte) Zeige oder widerlege nur mit Hilfe von Abschlusseigenschaften und den Sprachen D und E, dass $G = \{\, x\#y\#z \mid x, y, z \in \{\, \mathsf{0}, \mathsf{1} \,\}^* \,\}$ akzeptierbar ist.

   Hinweis: Falls G akzeptierbar ist, genügt es hier **nicht** einen entsprechenden Automaten anzugeben.

3. (12 Punkte) Gib eine deterministische Turingmaschine M_D an, so dass $\mathrm{L}(M_D) = D$.

   Hinweis: Wir empfehlen, für diese Turingmaschine 3 Bänder zu verwenden.

4. (12 Punkte) Beschreibe die Arbeitsweise von M_D. Gehe dabei auch auf die Funktion der verwendeten Bänder ein(, falls mehr als ein Band verwendet wurde) und beschreibe, warum/wie Eingaben akzeptiert oder verworfen werden.

Achte auf die Vollständigkeit und Nachvollziehbarkeit Deiner Argumentation.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Name: Vorname: Matrikelnummer: