TheGI 2: Berechenbarkeit und Komplexität

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 13. Juli 2010

2. Schriftliche Leistungskontrolle (EK)

Punktzahl In dieser schriftlichen Leistungskontrolle sind 100 Punkte erreichbar. Wer 40 Punkte erreicht, hat die schriftliche Leistungskontrolle bestanden (Note 4.0 oder besser).

Bearbeitungsdauer Die Bearbeitungsdauer beträgt 75 Minuten. Ihr erhaltet zudem 15 weitere Minuten für das Lesen der Aufgabenstellung und das Beschriften der ausgeteilten Zettel mit Eurem Namen und Eurer Matrikelnummer.

Hilfsmittel Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist die in der Vorlesung verwendete und auf der Vorlesungsseite bereit gestellte „Formelsammlung". Diese darf keine Notizen enthalten (und sie darf auch während der Klausur nicht als Papier oder Schmierpapier verwendet werden). Eigenes Papier darf *nicht* verwendet werden.

Aufgabenreihenfolge Die gegebene Reihenfolge der Aufgaben orientiert sich an der Themenreihenfolge in der Vorlesung. Es wird daher empfohlen, die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben selbst durch Abschätzung des Aufwands für die einzelnen Aufgaben festzulegen.

- Antworten zu den Aufgaben sind auf demselben Blatt zu geben, auf dem die jeweilige Aufgabenstellung steht. Dabei können beide Seiten der Blätter verwendet werden. Sofern weitere Blätter benötigt werden, werden diese durch uns bereitgestellt. **Lösungen zu verschiedenen Aufgaben sind stets auf unterschiedlichen Blättern abzugeben!**
- Auf jedem abgegebenen Blatt ist die **bearbeitete Aufgabe, Name und Matrikelnummer** anzugeben.
- Antworten oder Teile von Antworten, die mit Rotstift oder Bleistift geschrieben oder nicht eindeutig lesbar sind, werden nicht bewertet. Es sind nur dokumentenechte Stifte zugelassen.

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	Studiengang:
(Tutorin/Tutor:)	

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5		Σ	Note
Punkte	10	20	25	20	25		100	
Erreicht								
Korrektor								

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Beantworte **ohne Begründung**:

Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz gibt es einen Punkt Abzug. Insgesamt gibt es auf diese Aufgabe mindestens null Punkte.
Nicht eindeutige Markierungen werden mit Punktabzug gewertet! **Hinweis:** Es kann also auch vorkommen, dass in einigen Aufgaben gar nichts bzw. alles angekreuzt werden muss.

(a) Gegeben sei das Alphabet $\mathcal{A} = \{\, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \# \,\}$. Welche der folgenden Funktionen sind [Turing-] berechenbar?

- ☐ $g : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ mit $g(w) = \begin{cases} \mathtt{0} & \text{, falls } w \in A_\mathrm{L} \\ \mathtt{1} & \text{, falls } w \notin A_\mathrm{L} \end{cases}$
- ☐ $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $h(n) = 4n^2 + 4$
- ☐ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = \begin{cases} 0 & \text{, falls Deutschland nach dem Jahr 1990} \\ & \text{nie wieder Fußballweltmeister wird} \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}$

Hinweis: $A_\mathrm{L} \triangleq \{\, x\#w \in A_\mathrm{U} \mid w \in \mathrm{L}(M_x) \,\}$

(b) Sei $\mathcal{A}$ ein Alphabet. Es gilt für jede Teilmenge A von $\mathcal{A}^*$:

- ☐ A ist akzeptierbar.
- ☐ A ist entscheidbar.
- ☐ A ist regulär.

(c) Für jede Sprache A über einem Alphabet $\mathcal{A}$ gilt: A oder $\overline{A}$ ist akzeptierbar ($\overline{A} = \mathcal{A}^* \setminus A$).
Hinweis: Betrachte die Sprache $A_\in \triangleq \{\, x \in \{\, 0, 1 \,\}^* \mid 0 \in \mathrm{L}(M_x) \wedge 1 \notin \mathrm{L}(M_x) \,\}$

- ☐ Wahr
- ☐ Falsch

(d) Sei $\mathcal{A}$ ein (endliches) Alphabet und B eine nicht akzeptierbare Sprache über $\mathcal{A}$. Dann ist die Sprache $B \cup \overline{B}$ akzeptierbar ($\overline{B} = \mathcal{A}^* \setminus B$).

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

(e) Seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbare Funktionen. Dann ist auch $f \circ g$ eine berechenbare Funktion.

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

(f) Sei $\mathcal{A}$ ein Alphabet. Es gilt:

- ☐ $\emptyset$ ist eine Sprache über $\mathcal{A}$
- ☐ $\emptyset \in \mathcal{L}_2 \vee \mathcal{A}^* \in \mathcal{L}_2$
- ☐ $\emptyset$ ist akzeptierbar
- ☐ $\emptyset$ ist entscheidbar
- ☐ $\emptyset \in \mathrm{NP} \wedge \emptyset \in \mathrm{P}$

Aufgabe 2 **(20 Punkte)**

Beachte: Für die Bearbeitung aller Teilaufgaben darf das Theorem 7.3.1 der Formelsammlung **nicht** verwendet werden

1. Sei A_2 eine (akzeptierbare) Sprache über einem Alphabet $\mathcal{A}_2 = \{\, 1, 0, \# \,\}$ und sei M_A ein Akzeptierer für A_2 mit $\mathrm{L}(M_A) = A_2$.

   Zeige A_2^* ist akzeptierbar, indem Du die Arbeitsweise einer Turingmaschine M_2 mit $\mathrm{L}(M_2) = A_2^*$ beschreibst.

   Hinweise:

   - M_2 muss nicht formal angegeben werden.
   - M_A darf als Blackbox verwendet werden. Weitere Blackboxes dürfen nicht verwendet werden.

2. Ist A_2^* auch entscheidbar? Begründe Deine Antwort ohne Formelsammlung aber mit Bezug zu der beschriebenen Maschine M_2.

3. Zeige oder widerlege jeweils die folgenden zwei Aussagen

   (a) Für jede akzeptierbare Sprache B über einem Alphabet $\mathcal{A}$ gilt:
   $\mathcal{A}^* \setminus B$ ist akzeptierbar.

   (b) Es gibt eine akzeptierbare Sprache B über einem Alphabet $\mathcal{A}$ so dass gilt:
   $\mathcal{A}^* \setminus B$ ist akzeptierbar.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 3 **(25 Punkte)**

Sei A_3 wie folgt gegeben:

$$A_3 = \{\ x\#w \in A_{\mathrm{U}} \mid (1 \cdot w) \in \mathrm{L}(M_x)\ \}$$

Achtung: im Folgenden muss nur (1) oder (2) oder (3) bearbeitet werden!

(1) Zeige die Unentscheidbarkeit von A_3 mittels Diagonalisierung;

(2) Zeige die Unentscheidbarkeit von A_3 mittels Selbstanwendung;

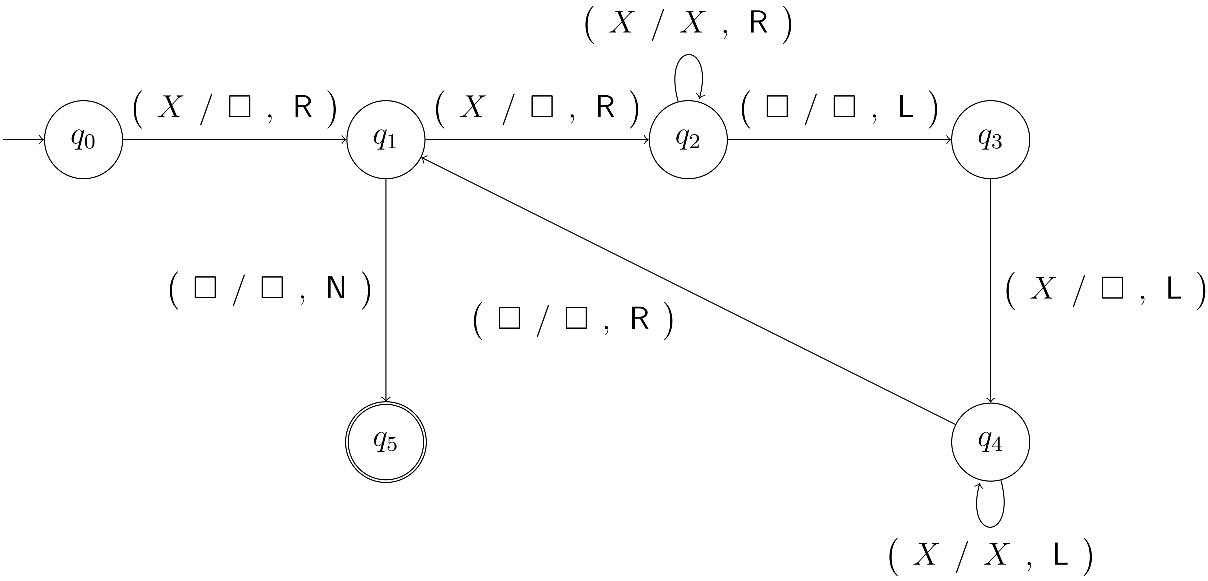
(3) Zeige die Unentscheidbarkeit von A_3 mit Reduktion.
Im Fall (3) (also sofern Reduktion verwendet wird), gelten folgende Hinweise:

- Verwende dazu die Sprache A_{L} aus der Formelsammlung.
- Die Korrektheit der angegebenen Reduktion ist nachzuweisen.
- Die Church-Turing-These darf verwendet werden, sofern die intuitive Berechenbarkeit an der entsprechende Stelle eindeutig ist.
- Für die Reduktion zu konstruierende Turingmaschinen müssen formal angegeben werden.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Sei $\mathcal{A}_4 = \{ \mathsf{0}, \mathsf{1} \}$ und $M_4 = (\{ q_i \mid i \in [0,5] \}, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_4 \cup \{ \Box \}, \Box, 1, \Delta_4, q_0, \{q_5\})$ wobei Δ_4 durch den Graphen gegeben sei (mit $X \in \{ \mathsf{0}, \mathsf{1} \}$):



Bitte wenden!

Name: Vorname: Matrikelnummer:

1. Gib in der nachfolgenden Tabelle für die vorgegeben Worte an den fehlenden Stellen jeweils dtime_{M_4} und dspace_{M_4} sowie ntime_{M_4} und nspace_{M_4} an.

w	$\mathrm{dtime}_{M_4}(w)$	$\mathrm{dspace}_{M_4}(w)$	$\mathrm{ntime}_{M_4}(w)$	$\mathrm{nspace}_{M_4}(w)$
λ				
0	2	2		
1	2	2		
01				
10		3		
11		3		
001				
110	7	4		
0000	10	5		
1011	10	5		
00001				
00100	16			
110111	21	7		
1101110	29			

2. Gib eine passende obere Schranke $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für den Berechnungsaufwand bei Eingaben der Länge n an, d.h. es soll gelten:
   - $\forall n \in \mathbb{N} : \mathrm{dTime}_{M_4}(n) \leq s(n)$ und
   - $\mathrm{dTime}_{M_4} \in \Theta(s)$.
3. Gib die Funktion $\mathrm{nSpace}_{M_4}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an.

Aufgabe 5 (25 Punkte)

Sei $\mathcal{A}_5 = \{\, \mathtt{0}, \mathtt{1} \,\}$ und sei die Sprache $A_4 \subseteq \mathcal{A}_5^*$ definiert als

$$A_4 = \{\ w \in \{\, \mathtt{0}, \mathtt{1} \,\}^* \mid (|w| \bmod 2) = 1\ \}$$

Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe ist zu beachten:

- Soll eine angegebene TM M oder ein Automat M eine Sprache A akzeptieren, ist dafür kein Beweis für $\mathrm{L}(M) = A$ erforderlich.
- Für eine angegebene TM M, mit $\mathrm{dTime}_M \in \mathrm{O}(n^i)$ darf ohne Nachweis $\mathrm{dTime}_M \in \mathrm{O}(n^i)$ vorausgesetzt werden.
- Alle angegebenen Turingmaschinen dürfen jeweils nicht mehr als 3 Zustände und 1 Band verwenden.

Es ist mit sehr hohen Punktabzügen zu rechnen falls $\mathrm{L}(M) = A$ vorausgesetzt wird, aber $\mathrm{L}(M) \neq A$ gilt bzw. $\mathrm{dTime}_M \in \mathrm{O}(n^i)$ vorausgesetzt wird, aber $\mathrm{dTime}_M \notin \mathrm{O}(n^i)$ gilt.

1. Für welche $i \in \{\, 0, 1, 2, 3 \,\}$ gilt $A_4 \in \mathcal{L}_i$? Weise die Korrektheit Deiner Antwort nach.
2. Welches ist das kleinste k, für das gilt $A_4 \in \mathrm{DTIME}(n^k)$? Begründe die Korrektheit Deiner Antwort anhand einer entsprechenden Turingmaschine.
3. Für welche $X \in \{\, \mathrm{P}, \mathrm{NP} \,\}$ gilt $A_4 \in X$? Begründe Deine Antwort kurz mit Hilfe der Ergebnisse der 2. Teilaufgabe.

Name: Vorname: Matrikelnummer: