Berlin, 17. Juli 2011

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Klausur TheGI 2 – Automaten und Komplexität

(Niedermeier/Hartung/Nichterlein, Sommersemester 2012)

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Σ	

Bearbeitungszeit:	60 min.
max. Punktezahl:	60 Punkte
min. Punktezahl zum Bestehen:	20 Punkte

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber oder Füller in der Farbe schwarz oder blau.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Vor- und Nachnamen sowie Matrikelnummer.
- **Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 1: **Reguläre Sprachen I** (10 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden Satz.

Satz 1. *Es gibt unendlich viele reguläre Sprachen L über dem Alphabet $\{0,1\}$, für welche folgendes gilt: Es gibt einen NFA M_1 mit $T(M_1) = L$, welcher weniger Zustände hat als ein minimaler DFA M_2 mit $T(M_2) = L$.*

Beweisen Sie Satz 1, indem Sie zeigen, dass dieser für alle Sprachen L_i mit $i \geq 2$ gilt, wobei

$$L_i = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \geq i \text{ und der } i\text{-letzte Buchstabe von } w \text{ ist eine } 0\}.$$

Hinweis: Seien $w_1 w_2 \dots w_n$ die Buchstaben eines Wortes $w \in \{0,1\}^*$. Falls $n \geq i$, dann ist w_{n-i-1} der i-letzte Buchstabe von w.

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 2: **Reguläre Sprachen II** (7 Punkte)

Der Systemadministrator einer Firma beschließt zur Erhöhung der IT-Sicherheit, dass nur noch sichere Passwörter verwendet werden dürfen. Sei nun $A = \{g, k, z\}$ ein Alphabet. (Anschaulich steht der Buchstabe g für Großbuchstaben, k für Kleinbuchstaben und z für Ziffern.) Die Menge aller sicheren Passwörter $\mathcal{P} \subseteq A^*$ besteht nun aus alle Wörtern, welche mindestens zwei verschiedene Buchstaben aus dem Alphabet A enthalten.

Unterstützen Sie den Systemadministrator bei der Erkennung sicherer Passwörter indem Sie einen **minimalen** DFA angeben, der die Sprache der sicheren Passwörter $\mathcal{P}$ akzeptiert. Hinweis: Sie brauchen ihre Konstruktion nicht weiter begründen.

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 3: **Kontextfreie und Reguläre Sprachen** (4+4 Punkte)

Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen ausschließlich der Null.

a) Beweisen Sie, dass $\{ a^{n!} \mid n \in \mathbb{N} \}$ nicht kontextfrei ist.

b) Für jedes $q \in \mathbb{N}$ definieren wir nun die reguläre Sprache

$$L_q := \{ a^{qn} \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

Für welche $q \in \mathbb{N}$ ist dann auch die Sprache

$$L_q \quad \cup \quad \{ a^{n!} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

Zur Erinnerung: Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen
Zu jeder kontextfreien Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ existiert eine natürliche Zahl k derart, dass sich alle $z \in L$ der Länge $|z| \geq k$ so zerlegen lassen in der Form $z = uvwxy$ für gewisse $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$, dass gilt:

(a) $|vx| \geq 1$,

(b) $|vwx| \leq k$ und

(c) für alle $i \geq 0$ ist $uv^iwx^iy \in L$.

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 4: **Büchi-Automaten** (4 Punkte)

Geben Sie für die folgende Sprache einen nichtdeterministischen Büchi-Automaten an (ohne Begründung).

$L_a = \{x \in \{a,b\}^\omega \mid$ in x kommen zwischen zwei a's mindestens zwei und maximal vier b's vor.$\}$

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 5: **CYK-Algorithmus** (6 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{A, B, C, D, E, F, H, S\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{ & S \to AH \mid EH, \\ & D \to AC, \\ & E \to AA \mid BA \mid BD, \\ & F \to EC \mid EH, \\ & H \to AF \mid FA, \\ & A \to a, B \to b, C \to c\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit dem Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami, dass das Wort *aabaca* in $L(G)$ ist. Füllen Sie dafür die folgende Tabelle vollständig aus. Weitere Erläuterungen sind nicht erforderlich.

	a	a	b	a	c	a
1						
2						★
3					★	★
4				★	★	★
5			★	★	★	★
6		★	★	★	★	★

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 6: **Kontextfreie Sprachen** (9 Punkte)

Sei CFL die Menge aller Tupel (G, x) bestehend aus einer kontextfreien Grammatik G in Chomsky-Normalform (d. h. nur Regeln der Form $A \to BC, A \to a$) und einem Wort x mit $x \in L(G)$.

Zeigen Sie, dass CFL $\in NTIME(cn^4)$ für eine beliebige Konstante c auf Einband-Turingmaschinen gilt.

Hinweis: Es wäre ausreichend eine Zweiband-Turingmaschine anzugeben, welche die Sprache CFL akzeptiert und für eine beliebige Konstante c' für jede Eingabe der Länge n höchsten $c' \cdot n^2$ Schritte benötigt.

Eine Beschreibung der Arbeitsweise der entsprechenden (Einband- oder Zweiband-) Turingmaschine zusammen mit einer Begründung der Korrektheit ist ausreichend.

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 7: **Polynomzeitreduktionen** (8 Punkte)

Eine Clique der Größe k in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Knotenteilmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| = k$ und $\{u, v\} \in E$ für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$. Betrachten Sie die beiden folgenden Probleme.

> CLIQUE
> **Eingabe:** Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein $k \in \mathbb{N}$.
> **Frage:** Gibt es eine Clique der Größe k in G?

> MULTICOLORED CLIQUE
> **Eingabe**: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, eine Funktion $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ und ein $k \in \mathbb{N}$.
> **Frage:** Gibt es eine Clique V' der Größe k in G, sodass für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ein $v \in V'$ existiert mit $c(v) = i$?

Hinweis: Intuitiv gesprochen ist MULTICOLORED CLIQUE die Aufgabe eine Clique V' der Größe k zu finden, wobei es für jede „Farbe“ $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ *genau* einen Knoten mit Farbe i in V' gibt.

Betrachten Sie die folgende Reduktion von CLIQUE auf MULTICOLORED CLIQUE.

Reduktion: Sei der Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$ eine Eingabe für CLIQUE. Wir konstruieren einen Graph $G' = (V', E')$ zusammen mit einer Färbung $c : V' \to \{1, 2, \ldots, k\}$ in 3 Schritten:

1. Für jeden Knoten $v \in V$ führe k Knoten $v^1, v^2, \ldots, v^k$ in G' ein. Setze $c(v^i) = i$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.
2. Verbinde für jede Kante $\{u, v\} \in E$ und für alle $1 \leq i, j \leq k$ die Knoten v^i und u^j in G' durch eine Kante.
3. Verbinde für alle $1 \leq i < j \leq k$ und Knoten $v \in V$ die Knoten v^i und v^j mit einer Kante.

Wir definieren nun die Polynomzeitreduktion f durch $f(G, k) = (G', c, k)$.

Überprüfen Sie die obige Reduktion auf Korrektheit und korrigieren Sie diese gegebenenfalls. Beweisen Sie anschließend die Korrektheit der (eventuell korrigierten) Reduktion, d. h. zeigen Sie

$$\forall (G, k) : (G, k) \in \text{CLIQUE} \Leftrightarrow f(G, k) \in \text{MULTICOLORED CLIQUE}.$$

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 8: **Vermischtes** (4 · 2 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen jeweils mit einer kurzen Begründung:

a) Sei $A \leq_m^p B$ für eine beliebige Sprache A und eine Sprache $B \in NP$. Gilt $A \leq_m^p C$ für eine NP-vollständige Sprache C? Gilt $A \in NP$?

b) Gibt es unter der Vorausetzung P = NP unendlich viele Sprachen in P, welche nicht NP-schwer sind?

c) Sind die nicht-regulären Sprachen unter Komplement abgeschlossen?

d) Betrachten Sie die nichtdeterministischen Kellerautomaten, die in jedem Schritt maximal 20 Zeichen im Keller stehen haben dürfen. Wo ist die von diesem eingeschränkten Kellerautomatentyp erkannte Sprachklasse in der Chomsky-Hierarchie einzuordnen?