Berlin, 05. Oktober 2012

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

TU Berlin
Nachklausur TheGI 2 – Automaten und Komplexität

(Niedermeier/Hartung/Nichterlein, Sommersemester 2012)

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
Σ	

Bearbeitungszeit:	60 min.
max. Punktezahl:	60 Punkte
min. Punktezahl zum Bestehen:	20 Punkte

Allgemeine Hinweise:

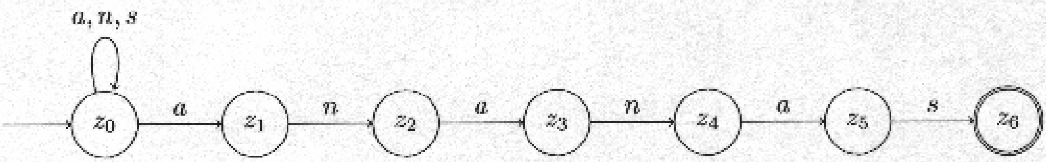
- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber oder Füller in der Farbe schwarz oder blau.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Vor- und Nachnamen sowie Matrikelnummer.
- **Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

Aufgabe 1: **Reguläre Sprachen** (5+1+2+1 Punkte)

Gegeben sei der nichtdeterministische endliche Automat $M = \{\{z_0, \ldots, z_6\}, \{a, n, s\}, \delta, \{z_0\}, \{z_6\}\}$ mit folgendem δ:



Hinweis: Die Antworten auf die folgenden Teilaufgaben müssen nicht begründet werden.

a) Geben Sie einen äquivalenten minimalen deterministischen Automaten an.

b) Beschreiben Sie in einem Satz die von M erkannte Sprache.

c) Geben Sie eine reguläre Grammatik G mit $G = T(M)$ an.

d) Geben Sie einen regulären Ausdruck für $T(M)$ an.

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 2: **Nichtreguläre Sprachen** (8 Punkte)

Beweisen Sie mittels der Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen und des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen, dass $L := \{a^k b^m c^n \mid m, n, k \geq 0 \text{ und } (m = n \text{ oder } k = 0)\}$ nicht regulär ist.

Zur Erinnerung: Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

$$L \text{ regulär } \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}\, \forall z \in L, |z| \geq n\, \exists u, v, w : \\ (z = uvw) \wedge (|v| \geq 1) \wedge (|uv| \leq n) \wedge (\forall i \geq 0 : uv^i w \in L)).$$

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 3: **Kontextfreie Sprachen** (5+4 Punkte)

a) Geben Sie kurz an, wann eine Grammatik in Chomsky-Normalform ist. Geben Sie eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform an, welche äquivalent zur im Folgenden definierten Grammatik G ist, d. h. $L(G) = L(G')$ (ohne Begründung).

$G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, c\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{ & S \to aACa \mid aAa \mid aCa \mid aa, \\ & A \to B \mid a, \\ & B \to C \mid c, \\ & C \to cC \mid c\}. \end{aligned}$$

b) Geben Sie für folgende kontextfreie Grammatik G einen Kellerautomaten M mit $L(G) = T(M)$ an (ohne Begründung).

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ und mit

$$\begin{aligned} P = \{ & S \to ASB \mid AB \\ & A \to a \mid aa \\ & B \to b\}. \end{aligned}$$

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 4: **Abschlusseigenschaften** (3+3 Punkte)

Sei A eine beliebige kontextfreie Sprache und B eine beliebige reguläre Sprache. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

Hinweis: Sie müssen die Abschlusseigenschaften nicht beweisen.

a) $A \setminus B$ ist kontextfrei.

b) $A^* \cup \overline{B}$ ist kontextfrei.

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 5: **Büchi-Automaten** (6 Punkte)

Geben Sie einen Büchi-Automaten für die im Folgenden definierte Sprache $L \subseteq \{a, b, c\}^\omega$ an. In L befinden sich all diejenigen Wörter aus $\{a, b, c\}^\omega$, welche alle der nachfolgenden Bedingungen erfüllen:

- Der erste Buchstabe ist ein a.
- Es treten unendlich viele a's auf.
- Nach jedem Auftreten des Buchstabens a tritt mindestens drei mal der Buchstabe b auf, bevor der Buchstabe a erneut auftritt.
- Nach jedem Auftreten des Buchstabens a tritt höchstens einmal der Buchstabe c auf, bevor der Buchstabe a erneut auftritt.
- Es treten niemals mehr als zwei b's direkt hintereinander auf.

Hinweis: Es ist nicht notwendig Ihre Konstruktion zu erläutern.

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 6: **Reduktionen** (3+8 Punkte)

a) Definieren Sie Polynomzeitreduktionen, die Komplexitätsklasse NP und NP-Vollständigkeit.

Hinweis: Falls Sie den Begriff NTIME verwenden, braucht dieser nicht formal definiert werden. Eine kurze Erläuterung (1 Satz) ist ausreichend.

b) Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ eine Konstante. Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist eine Funktion $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ eine k-Färbung, falls $c(v) \neq c(w)$ für alle $v, w \in V$ mit $\{v, w\} \in E$ gilt. Man sagt dann, dass der Graph G mit k Farben gefärbt werden kann.

Betrachten Sie die nachfolgenden Entscheidungsprobleme.

3-Coloring
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Frage: Kann G mit **drei** Farben gefärbt werden?

4-Coloring
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Frage: Kann G mit **vier** Farben gefärbt werden?

Das 3-Coloring-Problem ist NP-vollständig. Beweisen Sie unter Ausnutzung dieser Tatsache, dass 4-Coloring NP-vollständig ist.

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 7: **Verschiedenes** (3+2+2+2+2 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. prüfen Sie die Aussagen auf Korrektheit. Begründen Sie ihre Antwort jeweils kurz.

a) Beschreiben Sie in Worten die Arbeitsweise einer nichtdeterministischen Turingmaschine, welche die folgende Sprache in polynomieller Zeit erkennt:

$$L := \{v \in \{0,1\}^* \mid \text{die durch } v \text{ kodierte Binärzahl ist keine Primzahl}\}.$$

Hinweis: Das Dividieren von Zahlen in Binärkodierung kann auf Turingmaschinen in (deterministischer) Polynomialzeit durchgeführt werden. Sie brauchen die genaue Vorgehensweise dabei nicht erläutern und können dies ohne weitere Erklärung als Unterprozedur benutzen.

b) Erkennt ein DFA M eine unendliche Sprache, das heißt eine Sprache mit unendlich vielen Wörtern, dann muss es einen Kreis in M geben.

c) Die Laufzeit einer deterministischen Turingmaschine, welche auf alle Eingaben terminiert, kann nach oben abgeschätzt werden durch eine Funktion, welche nur abhängig ist von der Größe des Alphabets, der Anzahl der Zustände und dem Platzverbrauch der Turingmaschine.

d) Jedes Problem in NP\P lässt sich auf jedes NP-vollständige Problem mittels einer Polynomzeitreduktion reduzieren.

e) Falls $A \leq_m^p B$ für zwei Sprachen $A, B \subseteq \Sigma^*$, dann gilt $A \in P \Leftrightarrow B \in P$.