Berlin, 17.07.2013

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Klausur TheGI 2 – Automaten und Komplexität

(Niedermeier/Hartung/Nichterlein, Sommersemester 2013)

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Σ	

Bearbeitungszeit: 60 min.
max. Punktezahl: 60 Punkte

Allgemeine Hinweise:

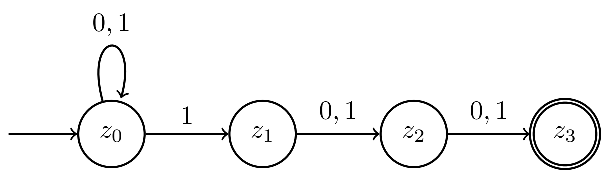
- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber oder Füller in der Farbe schwarz oder blau.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Vor- und Nachnamen sowie Matrikelnummer.
- **Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 1: **Endliche Automaten** (1+6 Punkte)

Sei $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{0, 1\}, \delta, \{z_0\}, \{z_3\})$ mit δ gegeben durch:



(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der $T(M)$ beschreibt (ohne Begründung).

(b) Geben Sie einen NFA oder DFA M' mit $T(M') = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \notin T(M)\}$ an.

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 2: **Rechtskongruenz** (6 Punkte)

Sei $L \subseteq \Sigma^* = \{0,1\}^*$ eine Sprache. Angenommen es gilt $(11,1) \in R_L$ und $(0,1) \notin R_L$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Es existiert eine natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $(1^n, 0) \in R_L$.

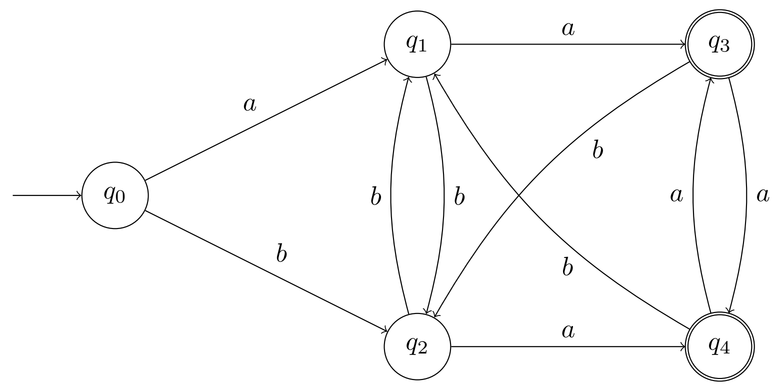
Hinweis: Die Rechtskongruenz R_L ist definiert vermöge

$$(x,y) \in R_L \Leftrightarrow (\forall w \in \Sigma^* : xw \in L \Leftrightarrow yw \in L).$$

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 3: **Minimierung endlicher Automaten** (6 Punkte)

Gegeben sei ein DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$, wobei $Z = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $E = \{q_3, q_4\}$. Die Überführungsfunktion δ sei wie folgt gegeben:



Geben Sie einen minimalen DFA M' mit $T(M') = T(M)$ an.

Sie können für die Minimierung von M die folgende Tabelle benutzen.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_0					
q_1					
q_2					
q_3					
q_4					

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 4: **Reguläre Sprachen** (9 Punkte)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Für ein Symbol $a \in \Sigma$ definieren wir

$$L/a := \{w \in \Sigma^* \mid wa \in L\}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Wenn L/a regulär ist, so ist auch L regulär.

(b) Wenn L regulär ist, so ist auch L/a regulär.

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 5: **Büchi-Automaten** (4 Punkte)

Geben Sie für die folgende Sprache einen nichtdeterministischen Büchi-Automaten an (ohne Begründung).

$$L_a = \{x \in \{a,b\}^\omega \mid \text{in } x \text{ kommen zwischen je zwei } b\text{'s ungerade viele } a\text{'s vor.}\}$$

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 6: **Grammatiken** (1+2+6 Punkte)

Sei $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ eine Grammatik mit

$$\begin{aligned} P = \{ & S \to AC, \\ & A \to aABC \mid aBC, \\ & CB \to BC, \\ & aBB \to ab,\ bBB \to bb \\ & bC \to bcc,\ cC \to ccc\}. \end{aligned}$$

(a) Geben Sie den größtmöglichen Typ der Grammatik G bezüglich der Chomsky-Hierarchie an.
Hinweis: Der größtmögliche Typ einer Grammatik ist i, wenn sie vom Typ i ist aber nicht vom Typ $i + 1$.

(b) Geben Sie die von der Grammatik G erzeugte Sprache $L(G)$ an (ohne Begründung).

(c) Zeigen Sie, dass $L(G)$ nicht kontextfrei ist, indem Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen benutzen.

Hinweis: Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen:

Ist eine Sprache L kontextfrei, so existiert eine natürliche Zahl n derart, dass sich alle $z \in L$ der Länge $|z| \geq n$ so in der Form $z = uvwxy$ für gewisse $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ zerlegen lassen, dass gilt:

(1) $|vx| \geq 1$,

(2) $|vwx| \leq n$ und

(3) für alle $i \geq 0$ ist $uv^iwx^iy \in L$.

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 7: **Polynomzeitreduktionen** (2+8 Punkte)

Das DOMINATING SET-Problem ist bereits aus der Vorlesung bekannt.

> DOMINATING SET
> **Eingabe:** Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein $k \in \mathbb{N}$.
> **Frage:** Besitzt G eine dominierende Knotenmenge V' der Größe höchstens k, d. h.
> $\exists V' \subseteq V, |V'| \leq k : \forall u \in V : u \in V' \vee$ (u hat mindestens einen Nachbarn in V')?

Ein Graph $G = (V, E)$ wird *bipartit* genannt, falls es eine Zerlegung von V in V_1 und V_2 mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ gibt, sodass jede Kante einen Endknoten in V_1 und einen in V_2 hat. Entsprechend ist das BIPARTITE DOMINATING SET-Problem wie folgt definiert:

> BIPARTITE DOMINATING SET
> **Eingabe:** Ein bipartiter Graph $G = (V_1 \cup V_2, E)$ und ein $k \in \mathbb{N}$.
> **Frage:** Besitzt G eine dominierende Knotenmenge der Größe höchstens k?

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass DOMINATING SET NP-vollständig ist. Betrachten Sie folgende Reduktion von DOMINATING SET auf BIPARTITE DOMINATING SET.

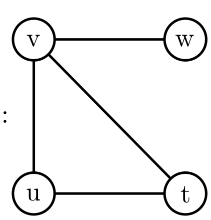
Reduktion: Sei der Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$ eine Eingabe für DOMINATING SET. Wir konstruieren einen Graph $G' = (V_1 \cup V_2, E')$ in 3 Schritten:

1. Füge in V_1 und V_2 jeweils eine Kopie von V ein. Bezeichne mit v^1 bzw. v^2 die Kopie des Knotens $v \in V$ in V_1 bzw. V_2.
2. Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ füge die Kanten $\{u^1, v^2\}$ und $\{v^1, u^2\}$ ein. Füge zusätzlich die Kante $\{u^1, u^2\}$ für alle Knoten $u \in V$ ein.
3. Füge einen Knoten z_1 zu V_1 hinzu und auch einen Knoten z_2 zu V_2. Füge die Kante $\{z_1, z_2\}$ hinzu und auch die Kante $\{u^1, z_2\}$ für alle $u \in V$.

Wir definieren nun die Polynomzeitreduktion f durch $f(G, k) = (G', k + 1)$.

(a) Geben Sie denjenigen Graph G' an, welcher durch obige Reduktion für den wie folgt gegebenen Graphen G konstruiert wird. Geben Sie in beiden Graphen eine dominierende Menge minimaler Größe an (ohne Begründung, einzeichnen genügt).

G:



(b) Überprüfen Sie die obige Reduktion f auf Korrektheit und korrigieren Sie diese gegebenenfalls. Beweisen Sie anschließend die Korrektheit der (eventuell korrigierten) Reduktion, d. h. zeigen Sie

$$\forall (G, k) : (G, k) \in \text{DOMINATING SET} \Leftrightarrow f(G, k) \in \text{BIPARTITE DOMINATING SET}.$$

Beweisen Sie darauf aufbauend, dass BIPARTITE DOMINATING SET NP-vollständig ist.

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 8: **Vermischtes** (9 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. bewerten Sie die Aussagen bzgl. ihres Wahrheitsgehaltes. Begründen Sie ihre Antworten jeweils kurz in 2-3 Sätzen.

a) Wäre das „P vs. NP"-Problem gelöst, wenn man zeigt, dass es eine kontextfreie Sprache L gibt, sodass $L \leq_m^p L'$ für alle $L' \in \mathrm{NP}$?

b) Unter der Annahme $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ gilt:

- Jede NP-schwere Sprache kann in Polynomzeit auf einer deterministischen Turingmaschine entschieden werden.
- Jede Sprache in P kann polynomiell auf Sat reduziert werden.
- Für jede endliche nichtleere Sprache A gilt, dass $L \leq_m^p A$ für alle $L \in \mathrm{NP}$.

c) Da Typ-2 Sprachen nicht unter Schnitt abgeschlossen sind, kann es keine zwei Typ-2 Sprachen A, B geben, sodass auch $A \cap B$ eine Typ-2 Sprache ist.

d) Es gibt unendlich viele Typ-1 Sprachen, die durch reguläre Ausdrücke beschrieben werden können.