Berlin, 07.10.2013

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Nachklausur TheGI 2 – Automaten und Komplexität

(Niedermeier/Hartung/Nichterlein, Sommersemester 2013)

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Σ	

Bearbeitungszeit:	60 min.
max. Punktezahl:	60 Punkte

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber oder Füller in der Farbe schwarz oder blau.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Vor- und Nachnamen sowie Matrikelnummer.
- **Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 1: **Grammatiken und Sprachen** (2+2+5 Punkte)

Seien G_1 und G_2 zwei wie folgt definierte Grammatiken

$$G_1 = (\{S_1, A_1, B_1\}, \{a, b\}, P_1, S_1)$$
$$P_1 = \{S_1 \to A_1 S_1 B_1 \mid A_1 B_1,\; A_1 \to aa,\; B_1 \to b\}$$

$$G_2 = (\{S_2, A_2, B_2\}, \{a, b\}, P_2, S_2)$$
$$P_2 = \{S_2 \to A_2 S_2 B_2 \mid A_2 B_2\; A_2 \to aa \mid aaA_2,\; B_2 \to b \mid bB_2\}.$$

a) Geben Sie den größtmöglichen Typ der Grammatiken G_1 und G_2 bezüglich der Chomsky-Hierarchie an.
Hinweis: Der größtmögliche Typ einer Grammatik ist i, wenn sie vom Typ i ist aber nicht vom Typ $i + 1$.

b) Geben Sie die von den Grammatiken G_1 und G_2 erzeugten Sprachen $L(G_1)$ und $L(G_2)$ an (ohne Begründung).

c) Beweisen Sie, dass mindestens eine der beiden Sprachen $L(G_1)$ und $L(G_2)$ nicht regulär ist.

Hinweis: Pumping-Lemma für reguläre Sprachen: Zu jeder regulären Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ existiert eine natürliche Zahl n derart, dass sich alle $x \in L$ der Länge $|x| \geq n$ so zerlegen lassen in der Form $x = uvw$ für gewisse $u, v, w \in \Sigma^*$, dass gilt:

(a) $v \neq \epsilon$,

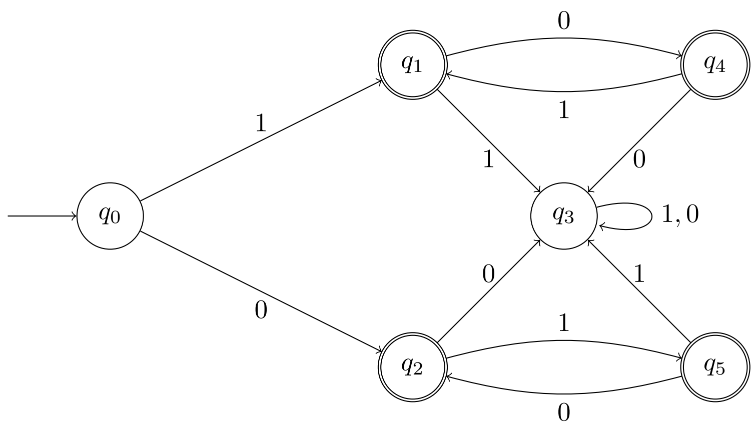
(b) $|uv| \leq n$ und

(c) für alle $i \geq 0$ ist $uv^i w \in L$.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 2: **Minimierung endlicher Automaten** (7 Punkte)

Gegeben sei ein DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$, wobei $Z = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $\Sigma = \{1, 0\}$ und $E = \{q_1, q_2, q_4, q_5\}$. Die Überführungsfunktion δ sei wie folgt gegeben:



Geben Sie einen minimalen DFA M' mit $T(M') = T(M)$ an.

Sie können für die Minimierung von M die folgende Tabelle benutzen. Die korrekt ausgefüllte Tabelle – zusammen mit dem korrekten Minimalautomaten – reicht als Begründung aus.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	g_5
q_0						
q_1						
q_2						
q_3						
q_4						
q_5						

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 3: **Reguläre Sprachen** (7 Punkte)

Sei L eine Sprache über einem Alphabet Σ. Wir definieren

$$\mathrm{Init}(L) := \{w \in \Sigma^* \mid x \in \Sigma^* \wedge wx \in L\}.$$

Beispiel: Für $L \subseteq \{a,b\}^*$ mit $L = \{aa, aba\}$ ist $\mathrm{Init}(L) = \{\epsilon, a, aa, ab, aba\}$.

Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn L regulär ist, dann ist auch $\mathrm{Init}(L)$ regulär.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 4: **Abschlusseigenschaften** (2+3 Punkte)

Seien A und B Sprachen über dem Alphabet Σ. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $A \setminus B$ ist kontextfrei, wenn $\overline{A \setminus B}$ regulär und B kontextfrei ist.

(b) A^* ist regulär genau dann wenn A regulär ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Abschlusseigenschaften aus der Vorlesung. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist das Komplement $\overline{L}$ definiert als $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 5: **CYK** (6 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{A, B, C, D, E, F, H, S\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{ & S \to AE \mid AF, \\ & E \to AA \mid BA \mid CA, \\ & F \to AH \mid BH \mid CH, \\ & H \to AE \mid AF, \\ & A \to a, B \to b, C \to c\}. \end{aligned}$$

Überprüfen Sie mit dem Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami, für jedes der Wörter *aba*, *abac* und *abacaba* jeweils, ob sie in $L(G)$ enthalten sind. Füllen Sie dafür die folgende Tabelle vollständig aus und begründen Sie damit Ihre Antwort. Weitere Erläuterungen sind nicht erforderlich.

	a	b	a	c	a	b	a
1							
2							★
3						★	★
4					★	★	★
5				★	★	★	★
6			★	★	★	★	★
7		★	★	★	★	★	★

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 6: **Kontextfreie Sprachen** (4+4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L \subseteq \Sigma^*$ eine wie folgt definierte kontextfreie Sprache:

$$L := \{x \circ W_1 \circ x \circ W_2 \circ x \mid x \in \Sigma \land W_1, W_2 \in \Sigma^* \land |W_1| = |W_2|\}.$$

So enthält L beispielsweise das Wort *abaaa* aber nicht *baaab*.

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G in Chomsky-Normalform an so dass $L(G) = L$ (ohne Begründung).

(b) Geben Sie einen Kellerautomaten M mit $L(M) = L$ an (ohne Begründung).

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 7: **Polynomzeitreduktionen** (2+2+4 Punkte)

Das wie folgt definierte Sat-Problem ist bereits aus der Vorlesung bekannt.

> **Sat**
> **Eingabe:** Aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform.
> **Frage:** Ist F erfüllbar?

Spezialfälle dieses Problems ergeben sich indem man die Anzahl an Literalen pro Klausel wie folgt einschränkt. Sei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl.

> k**-Sat**
> **Eingabe:** Aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform mit höchstens k Literalen pro Klausel.
> **Frage:** Ist F erfüllbar?

Aus der Vorlesung bekannt ist die NP-Vollständigkeit von 3-Sat.

Betrachten Sie folgende Beweisskizze für die NP-Schwere von 4-Sat.

Reduziere 4-Sat auf 3-Sat wie folgt: Sei F die gegebene Formel mit der Menge $L = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\}$ von Literalen und der Menge $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ von Klauseln. Ersetze jede Klausel mit 4 Literalen wie folgt (mit Benutzung der neuen Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_m$): $c_i = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \vee \ell_4) \rightsquigarrow (\ell_1 \vee \ell_2 \vee y_i) \wedge (\overline{y}_i \vee \ell_3 \vee \ell_4)$. Da 3-Sat NP-schwer ist, muss 4-Sat also auch NP-schwer sein.

(a) Geben Sie die Formel F' an, welche durch obige Reduktion für die wie folgt gegebene Formel F konstruiert wird. Geben Sie für beide Formeln eine erfüllende Belegung an (ohne Begründung).

$$F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_5) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4 \vee x_5)$$

(b) Geben Sie den Fehler in der obigen Beweisskizze an.

(c) Beweisen Sie die NP-Vollständigkeit von 4-Sat.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 8: **Vermischtes** (10 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. bewerten Sie die Aussagen bzgl. ihres Wahrheitsgehaltes. Begründen Sie ihre Antworten jeweils kurz in 2-3 Sätzen.

(a) Unter der Annahme $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dass es eine Sprache $A \in \mathrm{P}$ mit $A \notin \mathrm{NP}$ gibt.

(b) Unter der Annahme $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ gilt, dass 3-SAT nicht in Polynomzeit auf einer deterministischen Turingmaschine entschieden werden kann.

(c) Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist kontextfrei genau dann wenn der Index der Rechtskongruenz R_L unendlich ist.

(d) Seien $L_1, L_2, L_3, \ldots$ unendlich viele, jeweils reguläre Sprachen über dem Alphabet Σ. Da reguläre Sprachen unter der Vereinigung abgeschlossen sind, ist die wie folgt definierte Sprache L regulär.

$$L := \bigcup_{i \geq 1} L_i$$

(e) Es gibt unendlich viele Sprachen die von nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt werden können, aber nicht von deterministischen Turingmaschinen.