Berlin, 07.10.2013

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Nachklausur TheGI 2 – Automaten und Komplexität

(Niedermeier/Hartung/Nichterlein, Sommersemester 2013)

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Σ	

Bearbeitungszeit: 60 min.
max. Punktezahl: 60 Punkte

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber oder Füller in der Farbe schwarz oder blau.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Vor- und Nachnamen sowie Matrikelnummer.
- **Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 1: **Grammatiken und Sprachen** (2+2+5 Punkte)

Seien G_1 und G_2 zwei wie folgt definierte Grammatiken

$$G_1 = (\{S_1, A_1, B_1\}, \{a, b\}, P_1, S_1)$$
$$P_1 = \{S_1 \to A_1S_1B_1 \mid A_1B_1,$$
$$A_1 \to aa,$$
$$B_1 \to b\}$$

$$G_2 = (\{S_2, A_2, B_2\}, \{a, b\}, P_2, S_2)$$
$$P_2 = \{S_2 \to A_2S_2B_2 \mid A_2B_2$$
$$A_2 \to aa \mid aaA_2,$$
$$B_2 \to b \mid bB_2\}.$$

a) Geben Sie den größtmöglichen Typ der Grammatiken G_1 und G_2 bezüglich der Chomsky-Hierarchie an.
Hinweis: Der größtmögliche Typ einer Grammatik ist i, wenn sie vom Typ i ist aber nicht vom Typ $i + 1$.

b) Geben Sie die von den Grammatiken G_1 und G_2 erzeugten Sprachen $L(G_1)$ und $L(G_2)$ an (ohne Begründung).

c) Beweisen Sie, dass mindestens eine der beiden Sprachen $L(G_1)$ und $L(G_2)$ nicht regulär ist.

Hinweis: Pumping-Lemma für reguläre Sprachen: Zu jeder regulären Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ existiert eine natürliche Zahl n derart, dass sich alle $x \in L$ der Länge $|x| \geq n$ so zerlegen lassen in der Form $x = uvw$ für gewisse $u, v, w \in \Sigma^*$, dass gilt:

(a) $v \neq \epsilon$,

(b) $|uv| \leq n$ und

(c) für alle $i \geq 0$ ist $uv^iw \in L$.

——————Lösung——————

a) G_1 und G_2 sind vom Typ 2, da jede Produktregel $\alpha \to \beta \in P_1$ die Bedingungen $\alpha \in V$ und $|\alpha| \leq |\beta|$ erfüllt, $A_1 \to aa$ und $A_2 \to aa$ verstoßen gegen die Bedingungen für eine reguläre Grammatik.

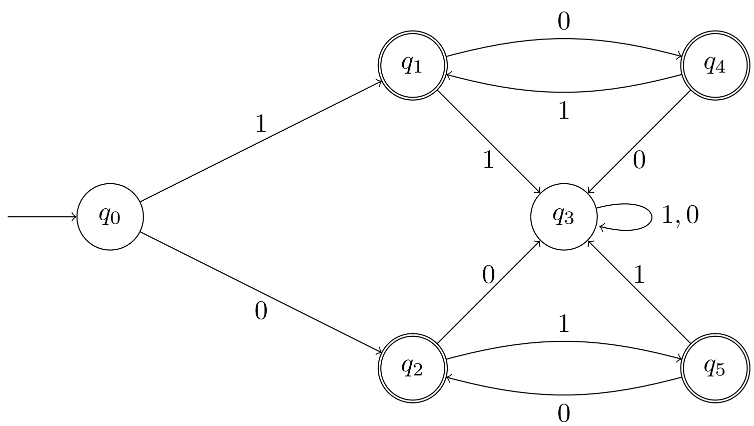
b) $L(G_1) = \{a^{2n}b^n \mid n \geq 1\}$ und $L(G_2) = \{a^{2l}b^k \mid l, k \geq 1\}$

c) Da $L(G_2)$ regulär ist, beweisen wir für $L(G_1)$, dass die erzeugte Sprache das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen nicht erfüllt.
Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Pumping-Zahl der Sprache $L(G_1)$. Betrachte $x = a^{2n}b^n$. Es gilt offensichtlich $x \in L$ und $|x| \geq n$. Sei $uvw = x$ eine beliebige Zerlegung unter den Bedingungen von (a) und (b). Aus den Bedingungen von (a) und (b) folgt $v = a^j$ mit $1 \leq j \leq n$. Also muss die Zerlegung wie folgt aussehen: $uvw = a^{|u|}a^{|v|}a^{2n-|u|-|v|}b^n = a^{2n}b^n$. Jedoch gilt für $i = 0$: $uv^0w = a^{|u|}a^{2n-|u|-|v|}b^n = a^{2n-j}b^n \notin L(G_1)$. Damit folgt, dass $L(G_1)$ nicht regulär ist.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 2: **Minimierung endlicher Automaten** (7 Punkte)

Gegeben sei ein DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$, wobei $Z = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $\Sigma = \{1, 0\}$ und $E = \{q_1, q_2, q_4, q_5\}$. Die Überführungsfunktion δ sei wie folgt gegeben:



Geben Sie einen minimalen DFA M' mit $T(M') = T(M)$ an.

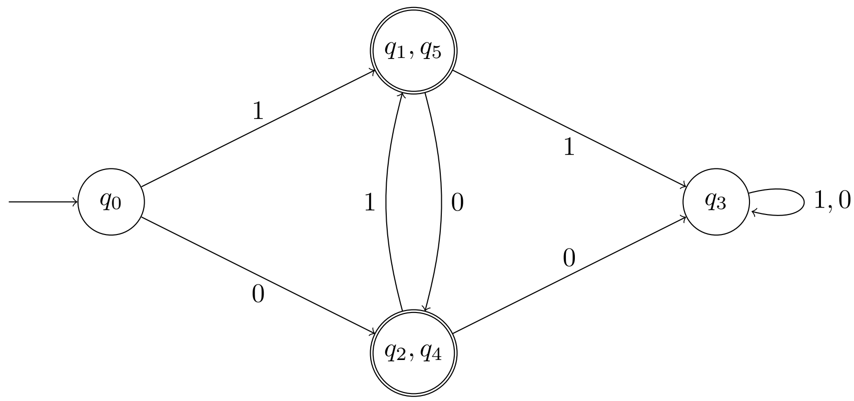
Sie können für die Minimierung von M die folgende Tabelle benutzen. Die korrekt ausgefüllte Tabelle – zusammen mit dem korrekten Minimalautomaten – reicht als Begründung aus.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_0						
q_1						
q_2						
q_3						
q_4						
q_5						

———————Lösung———————

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_0						
q_1	$\star$					
q_2	$\star$	$\star$				
q_3	$\star$	$\star$	$\star$			
q_4	$\star$	$\star$		$\star$		
q_5	$\star$		$\star$	$\star$	$\star$	

$M' = (Z', \Sigma, \delta', q_0, E')$ mit $Z' = \{q_0, \{q_1, q_5\}, q_3, \{q_2, q_4\}\}$, $E' = \{\{q_1, q_5\}, \{q_2, q_4\}\}$ und δ':



Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 3: **Reguläre Sprachen** (7 Punkte)

Sei L eine Sprache über einem Alphabet Σ. Wir definieren

$$\mathrm{Init}(L) := \{w \in \Sigma^* \mid x \in \Sigma^* \land wx \in L\}.$$

Beispiel: Für $L \subseteq \{a,b\}^*$ mit $L = \{aa, aba\}$ ist $\mathrm{Init}(L) = \{\epsilon, a, aa, ab, aba\}$.

Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn L regulär ist, dann ist auch $\mathrm{Init}(L)$ regulär.

——————Lösung——————

Variante 1: Sei L regulär und $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der L akzeptiert. Für $\mathrm{Init}(L)$ konstruiere $M' := (Z, \Sigma, \delta, z_0, E')$ mit $E' := \{z \in Z \mid \exists x \in \Sigma^* : \hat{\delta}(z, x) \in E\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} w \in T(M') &\iff \hat{\delta}(z_0, w) \in E' \\ &\iff \exists x \in \Sigma^* : \hat{\delta}(\hat{\delta}(z_0, w), x) \in E \\ &\iff \exists x \in \Sigma^* : \hat{\delta}(z_0, wx) \in E \\ &\iff \exists x \in \Sigma^* : wx \in T(M) \\ &\iff \exists x \in \Sigma^* : wx \in L \\ &\iff w \in \mathrm{Init}(L)\ , \end{aligned}$$

also $T(M') = \mathrm{Init}(L)$. Damit muss auch $\mathrm{Init}(L)$ regulär sein.

Variante 2: Zeige $R_L \subseteq R_{\mathrm{Init}(L)}$ per Kontraposition: Sei $(v, w) \notin R_{\mathrm{Init}(L)}$. D. h. es gibt ein $z \in \Sigma^*$ so, dass

$$vz \in \mathrm{Init}(L) \tag{1}$$

und

$$wz \notin \mathrm{Init}(L)\ . \tag{2}$$

(Der Fall $vz \notin \mathrm{Init}(L)$ und $wz \in \mathrm{Init}(L)$ folgt durch Vertauschen von v und w.)
Aus (1) folgt $vzx \in L$ für ein $x \in \Sigma^*$. Nun gilt wegen (2) aber $wzx \notin L$. Es folgt $(v, w) \notin R_L$.
R_L verfeinert also $R_{\mathrm{Init}(L)}$. Damit muss

$$\mathrm{Index}(R_{\mathrm{Init}(L)}) \leq \mathrm{Index}(R_L) \tag{3}$$

gelten. Ist nun L regulär, so hat nach dem Satz von Myhill-Nerode R_L und wegen (3) dann auch $R_{\mathrm{Init}(L)}$ endlichen Index. Damit ist dann wiederum nach Myhill-Nerode auch $\mathrm{Init}(L)$ regulär.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 4: **Abschlusseigenschaften** (2+3 Punkte)

Seien A und B Sprachen über dem Alphabet Σ. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $A \setminus B$ ist kontextfrei, wenn $\overline{A \setminus B}$ regulär und B kontextfrei ist.

(b) A^* ist regulär genau dann wenn A regulär ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Abschlusseigenschaften aus der Vorlesung. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist das Komplement $\overline{L}$ definiert als $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$.

——————Lösung——————

(a) Wir beweisen die Aussage.
Annahme: $\overline{A \setminus B}$ ist regulär und B ist kontextfrei. Da $\overline{A \setminus B}$ regulär ist, ist nach den Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen auch $\overline{\overline{A \setminus B}} = A \setminus B$ regulär und damit auch kontextfrei.

(b) Wir widerlegen die Aussage.
Sei $A = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} \cup \{a, b\}$. Dann ist A nach TheGI2 Lehrstoff nicht regulär, jedoch ist $A^* = \{a, b\}^*$ regulär.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 5: **CYK** (6 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{A, B, C, D, E, F, H, S\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{ & S \to AE \mid AF, \\ & E \to AA \mid BA \mid CA, \\ & F \to AH \mid BH \mid CH, \\ & H \to AE \mid AF, \\ & A \to a, B \to b, C \to c\}. \end{aligned}$$

Überprüfen Sie mit dem Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami, für jedes der Wörter *aba*, *abac* und *abacaba* jeweils, ob sie in $L(G)$ enthalten sind. Füllen Sie dafür die folgende Tabelle vollständig aus und begründen Sie damit Ihre Antwort. Weitere Erläuterungen sind nicht erforderlich.

	a	b	a	c	a	b	a
1							
2							★
3						★	★
4					★	★	★
5				★	★	★	★
6			★	★	★	★	★
7		★	★	★	★	★	★

————————Lösung————————

	a	b	a	c	a	b	a
1	A	B	A	C	A	B	A
2	–	E	–	E	–	E	★
3	S, H	–	S, H	–	S, H	★	★
4	–	F	–	F	★	★	★
5	S, H	–	S, H	★	★	★	★
6	–	F	★	★	★	★	★
7	S, H	★	★	★	★	★	★

Antwort:

- $aba \in L(G)$ (siehe Zeile 3, Spalte 1 oder 4)
- $abac \notin L(G)$ (siehe Zeile 4, Spalte 1)
- $abacaba \in L(G)$ (siehe Zeile 7, Spalte 1)

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

Aufgabe 6: **Kontextfreie Sprachen** (4+4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L \subseteq \Sigma^*$ eine wie folgt definierte kontextfreie Sprache:

$$L := \{x \circ W_1 \circ x \circ W_2 \circ x \mid x \in \Sigma \land W_1, W_2 \in \Sigma^* \land |W_1| = |W_2|\}.$$

So enthält L beispielsweise das Wort *abaaa* aber nicht *baaab*.

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G in Chomsky-Normalform an so dass $L(G) = L$ (ohne Begründung).

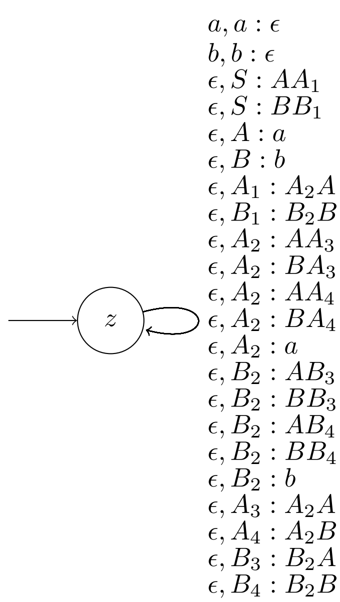
(b) Geben Sie einen Kellerautomaten M mit $L(M) = L$ an (ohne Begründung).

——————Lösung——————

(a) $G = (V = \{S, A, B, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3\}, \Sigma = \{a, b\}, P, S)$ mit

$$\begin{aligned} P = \{ & S \to AA_1 \mid BB_1, \\ & A \to a, \\ & B \to b, \\ & A_1 \to A_2A, \\ & B_1 \to B_2B, \\ & A_2 \to AA_3 \mid BA_3 \mid AA_4 \mid BA_4 \mid a, \\ & B_2 \to AB_3 \mid BB_3 \mid AB_4 \mid BB_4 \mid b, \\ & A_3 \to A_2A, \\ & A_4 \to A_2B, \\ & B_3 \to B_2A, \\ & B_4 \to B_2B\} \end{aligned}$$

(b) Der zu G gehörige Kellerautomat ist $M = (Z = \{z\}, \Sigma = \{a, b\}, \Gamma = V \cup \Sigma, \delta, z, S)$ wobei δ wie folgt definiert ist:



Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 7: **Polynomzeitreduktionen** (2+2+4 Punkte)

Das wie folgt definierte SAT-Problem ist bereits aus der Vorlesung bekannt.

> **SAT**
> **Eingabe:** Aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform.
> **Frage:** Ist F erfüllbar?

Spezialfälle dieses Problems ergeben sich indem man die Anzahl an Literalen pro Klausel wie folgt einschränkt. Sei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl.

> **k-SAT**
> **Eingabe:** Aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform mit höchstens k Literalen pro Klausel.
> **Frage:** Ist F erfüllbar?

Aus der Vorlesung bekannt ist die NP-Vollständigkeit von 3-SAT.

Betrachten Sie folgende Beweisskizze für die NP-Schwere von 4-SAT.

Reduziere 4-SAT auf 3-SAT wie folgt: Sei F die gegebene Formel mit der Menge $L = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\}$ von Literalen und der Menge $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ von Klauseln. Ersetze jede Klausel mit 4 Literalen wie folgt (mit Benutzung der neuen Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_m$): $c_i = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \vee \ell_4) \rightsquigarrow (\ell_1 \vee \ell_2 \vee y_i) \wedge (\overline{y}_i \vee \ell_3 \vee \ell_4)$. Da 3-SAT NP-schwer ist, muss 4-SAT also auch NP-schwer sein.

(a) Geben Sie die Formel F' an, welche durch obige Reduktion für die wie folgt gegebene Formel F konstruiert wird. Geben Sie für beide Formeln eine erfüllende Belegung an (ohne Begründung).

$$F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_5) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4 \vee x_5)$$

(b) Geben Sie den Fehler in der obigen Beweisskizze an.

(c) Beweisen Sie die NP-Vollständigkeit von 4-SAT.

———————Lösung———————

(a) $F' = (x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\overline{y_1} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_3 \vee y_2) \wedge (\overline{y_2} \vee x_4 \vee \overline{x}_5) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee y_3) \wedge (\overline{y_3} \vee x_4 \vee x_5)$

Sei β_F eine Belegung für F und $\beta_{F'}$ eine Belegung für F' mit
$\beta_F(x_1) = 1$, $\beta_F(x_2) = 0$, $\beta_F(x_3) = 1$, $\beta_F(x_4) = 1$, $\beta_F(x_5) = 1$

$\beta_{F'}(x_1) = 1$, $\beta_{F'}(x_2) = 0$, $\beta_{F'}(x_3) = 1$, $\beta_{F'}(x_4) = 1$, $\beta_{F'}(x_5) = 1$
$\beta_{F'}(y_1) = 0$, $\beta_{F'}(y_2) = 0$, $\beta_{F'}(y_3) = 0$
Dann erfüllt β_F F und $\beta_{F'}$ F'.

(b) Um aus der NP-Schwere von 3-SAT die NP-Schwere von 4-SAT zu folgern, bedarf es einer Reduktion 3-SAT $\leq_m^p$ 4-SAT, da wir die Transitivität dieser Reduktionsart ausnutzen wollen. Der Fehler im angegebenen Beweis ist daher, dass 4-SAT $\leq_m^p$ 3-SAT gezeigt wird und wir so die Behauptung nicht folgern können.

(c) 4-SAT ist in NP, da in polynomieller Zeit eine Belegung der Formelvariablen geraten und verifiziert werden kann, ob sie die Formel erfüllt. Da jede aussagenlogische Formel in 3-KNF auch in 4-KNF ist, können wir 3-SAT mit der Identitätsabbildung (bzgl. 3-KNF Formeln) auf 4-SAT reduzieren. Es ist klar, dass diese in polynomieller Zeit berechenbar ist und dass eine Formel in 3-KNF genau dann in 3-SAT ist, wenn sie in 4-SAT ist. Da 3-SAT NP-schwer ist, folgt mit 3-SAT $\leq_m^p$ 4-SAT und der Transitivität dieser Relation die NP-Schwere von 4-SAT. Da 4-SAT in NP liegt, ist 4-SAT NP-vollständig.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 8: **Vermischtes** (10 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. bewerten Sie die Aussagen bzgl. ihres Wahrheitsgehaltes. Begründen Sie ihre Antworten jeweils kurz in 2-3 Sätzen.

(a) Unter der Annahme $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dass es eine Sprache $A \in \mathrm{P}$ mit $A \notin \mathrm{NP}$ gibt.

(b) Unter der Annahme $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ gilt, dass 3-Sat nicht in Polynomzeit auf einer deterministischen Turingmaschine entschieden werden kann.

(c) Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist kontextfrei genau dann wenn der Index der Rechtskongruenz R_L unendlich ist.

(d) Seien $L_1, L_2, L_3, \ldots$ unendlich viele, jeweils reguläre Sprachen über dem Alphabet Σ. Da reguläre Sprachen unter der Vereinigung abgeschlossen sind, ist die wie folgt definierte Sprache L regulär.

$$L := \bigcup_{i \geq 1} L_i$$

(e) Es gibt unendlich viele Sprachen die von nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt werden können, aber nicht von deterministischen Turingmaschinen.

————————Lösung————————

(a) Es gilt $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$, deshalb folgt aus $A \in \mathrm{P}$ automatisch $A \in \mathrm{NP}$. Deswegen ist die Aussage falsch.

(b) Das 3-Sat Problem ist in NP. Wenn $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, dann ist es auch in P und ist damit auch in polynomieller Zeit entscheidbar. Damit ist die Aussage falsch.

(c) Die Aussage ist falsch. Denn $L = \emptyset$ ist regulär, also kontextfrei, dennoch hat R_L endlichen Index (Myhill-Nerode).

(d) Die Aussage ist falsch. Sei $L_i = \{a^i b^i\}$, dann ist L_i für jedes i endlich und somit regulär, aber $L = \bigcup_{i \geq 1} L_i = \{a^n b^n | n \geq 1\}$ ist nicht regulär.

(e) Nein. Jede Sprache, die ein nichtdeterministischer Kellerautomat akzeptieren kann, kann auch eine deterministische Turingmaschine akzeptieren. (Jede Sprache vom Typ 2 hat auch Typ 0.)