Berlin, 23.07.2014

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

Klausur TheGI 2 – Automaten und Komplexität

(Niedermeier/Chen/Nichterlein, Sommersemester 2014)

1	
2	
3	
4	
5	
6	
Σ	

Einlesezeit:	15 min.
Bearbeitungszeit:	60 min.
max. Punktezahl:	80 Punkte

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber oder Füller in der Farbe schwarz oder blau.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Vor- und Nachnamen sowie Matrikelnummer.
- **Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

Aufgabe 1: **Grammatiken** (9 Punkte)

Gegeben ist folgende Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to ab \mid SbSaS \mid \epsilon\}, S)$.

Geben Sie an, welche der folgenden Wörter in $L(G)$ enthalten sind und geben Sie die entsprechenden Ableitungen an.

(a) *abba*

(b) *ababa*

(c) *bbaabaab*

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

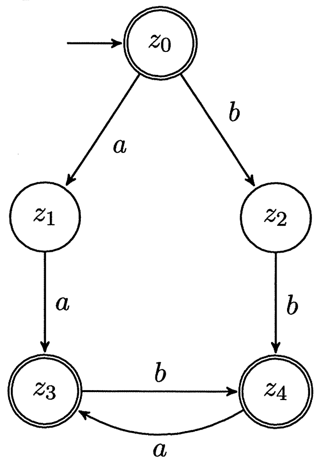
Aufgabe 2: **Minimierung endlicher Automaten** (12 Punkte)

Gegeben sind die folgenden deterministischen endlichen Automaten

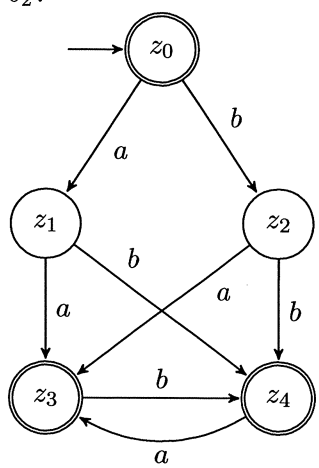
$$M_i = (\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}, \{a, b\}, \delta_i, z_0, \{z_0, z_3, z_4\}), \quad i \in \{1, 2\},$$

mit:

δ_1:



δ_2:



Genau einer der beiden Automaten ist nicht minimal. Welcher? Geben Sie für Ihre Wahl einen entsprechenden Minimalautomaten an.

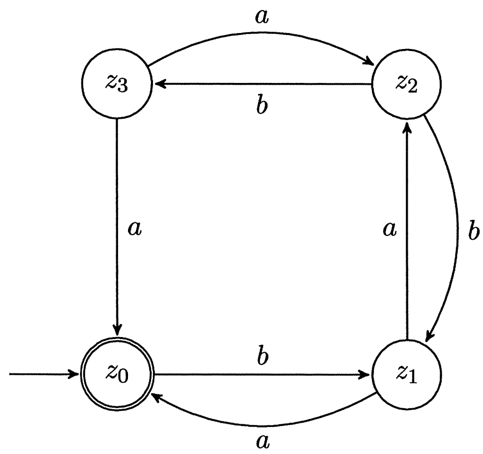
Hinweis: Sie können für die Minimierung eines DFA die folgende Tabelle benutzen. Hierbei bezeichnet z_F den Fangzustand. Die korrekt ausgefüllte Tabelle – zusammen mit dem korrekten Minimalautomaten – reicht als Begründung aus.

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_F
z_0						
z_1						
z_2						
z_3						
z_4						
z_F						

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

Aufgabe 3: **Endliche Automaten und Rechtskongruenz** (18 Punkte)

Gegeben ist ein NFA $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{a, b\}, \delta, \{z_0\}, \{z_0\})$ mit wie folgt definierter Überführungsrelation δ:



Sei $T(M) = L$.

(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = L$ an (ohne Begründung).

(b) Geben Sie die drei Äquivalenzklassen der Rechtskongruenz R_L an. Es reicht aus, je einen Repräsentanten pro Äquivalenzklasse anzugeben (ohne Begründung).
Hinweis: Zu jedem $L \subseteq \Sigma^*$ ist die Rechtskongruenz R_L definiert vermöge

$$xR_Ly \iff (\forall w \in \Sigma^* \colon xw \in L \iff yw \in L).$$

(c) Zeigen Sie, dass die drei in Teilaufgabe (b) angegebenen Äquivalenzklassen tatsächlich paarweise disjunkt sind. Es reicht hier zu zeigen, dass für keine zwei Repräsentanten x und y verschiedener Äquivalenzklassen gilt dass xR_Ly.

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

Aufgabe 4: **Reguläre Sprachen und Automatenkonstruktion** (12 Punkte)

Sei L eine Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Wir definieren

$$\text{New}(L) := \{ww' \mid w \in L \wedge w' \notin L\}.$$

(a) Geben Sie zwei Wörter der Länge mindestens fünf aus $\text{New}(\{(ab)^\ell(ba)^\ell \mid \ell \geq 1\})$ an (ohne Begründung).

(b) Gegeben sei ein DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit $T(M) = L$. Beschreiben Sie, ausgehend von M, die Konstruktion eines NFA M' mit $T(M') = \text{New}(L)$.

Hinweis: Bei der Angabe Ihres NFA sind ϵ-Transitionen erlaubt.

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

Aufgabe 5: **Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen** (13 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^{9\ell^2} \mid \ell \geq 1\}$ nicht kontextfrei ist.

Hinweis: Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen:

Ist eine Sprache L kontextfrei, so existiert eine natürliche Zahl n derart, dass sich alle $z \in L$ der Länge $|z| \geq n$ so in der Form $z = uvwxy$ für gewisse $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ zerlegen lassen, dass gilt:

(1) $|vx| \geq 1$,

(2) $|vwx| \leq n$ und

(3) für alle $i \geq 0$ ist $uv^iwx^iy \in L$.

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

Aufgabe 6: **Reduktion** (16 Punkte)

Das NP-vollständige 3-SAT-Problem und das MAX-2-SAT-Problem sind wie folgt definiert.

3-SAT

Eingabe: Aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform mit höchstens 3 Literalen pro Klausel.

Frage: Existiert eine Variablenbelegung, die alle Klauseln von F erfüllt?

MAX-2-SAT

Eingabe: Aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform mit höchstens 2 Literalen pro Klausel und eine natürliche Zahl $k \geq 0$.

Frage: Existiert eine Variablenbelegung, die mindestens k Klauseln von F erfüllt?

Hinweis: Eine Variablenbelegung *erfüllt* eine Klausel, wenn diese Klausel durch die genannte Belegung zu 1 ausgewertet wird.

Betrachten Sie die folgende Beweisskizze für die NP-Schwere von MAX-2-SAT.

Reduktion: Sei F eine Formel mit der Klauselmenge $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$, so dass jede Klausel C_i höchstens drei Literale enthält. Wir konstruieren eine Eingabeinstanz $(F', k := 7m)$ für MAX-2-SAT in zwei Schritten:

1. Für jede Klausel C_i, die weniger als drei Literale enthält, verdoppeln wir eines der vorkommenden Literale, bis diese Klausel genau drei Literale enthält.
2. Für jede in F vorkommende Klausel $C_i := (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3)$ fügen wir eine Menge B_i von 10 Klauseln

$$\begin{array}{lll} B_i^1 := (\ell_1), & B_i^5 := (\overline{\ell_1} \vee \overline{\ell_2}), & B_i^8 := (\ell_1 \vee \overline{y_i}), \\ B_i^2 := (\ell_2), & B_i^6 := (\overline{\ell_2} \vee \overline{\ell_3}), & B_i^9 := (\ell_2 \vee \overline{y_i}), \\ B_i^3 := (\ell_3), & B_i^7 := (\overline{\ell_3} \vee \overline{\ell_1}), & B_i^{10} := (\ell_3 \vee \overline{y_i}) \\ B_i^4 := (y_i), & & \end{array}$$

   zu F' hinzu, wobei y_i eine neue Variable ist, die noch nicht in F vorgekommen ist und ausschließlich für die Klausel C_i eingeführt wird.

Hinweis: Ein Literal ℓ ist entweder eine Variable x oder die Negation $\overline{x}$ einer Variable x. Wenn $\ell = \overline{x}$, dann ist $\overline{\ell}$ definiert als x.

Beantworten Sie folgende Fragen.

(a) Zeigen Sie dass jede $C_i = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3)$ erfüllende Belegung zu einer Belegung erweitert werden kann, die genau sieben Klauseln von B_i erfüllt.

(b) Zeigen Sie dass umgekehrt jede sieben Klauseln von B_i erfüllende Belegung auch C_i erfüllt.

(c) Beschreiben Sie, wie die unter (a) und (b) gewonnenen Aussagen genutzt werden können um eine polynomielle Reduktion von 3-SAT auf MAX-2-SAT zu erhalten.