K. Robering, L. Frantzen, D. Tidhar, T. Wieczorek — WS 00/01

Nachklausur TheGI 3

Name, Vorname: ______________________ Matr.-Nr.: ______________________

Übung im WS ______

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte:								

Übungsnote: **Klausurnote:** **Gesamtnote:**

Aufgabe 1:

(a) Untersuchen Sie mit Hilfe der Wahrheitstafelmethode die folgende Formel auf Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit: $(\bot \to p) \to (\neg q \leftrightarrow \top)$! (2 P)

(b) Ergänzen Sie die folgende Wahrheitstafel! (Die Formel dieser Tafel φ ist mit Hilfe der Junktoren aus $\{\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ gebildet, und es ist $\mathrm{Symb}(\varphi) = \{p, q\}$. Die Wahrheitstafel darf auf dem Aufgabenblatt ergänzt werden.) (2 P)

p	q	(	...	p	...	(	...	...	...	))	...	...	...
T	T				T			T			F	F	
T	F				F		T	F			F		
F	T							F			T		F
F	F							F			T		

Aufgabe 2: Gegeben sei die Formel $(\bot \to p) \to (\neg q \leftrightarrow \top)$ aus Aufgabe 1(a).

(a) Geben Sie eine disjunktive Normalform für diese Formel an! (2 P)

(b) Geben Sie eine konjunktive Normalform für diese Formel an! (2 P)

Aufgabe 3: Untersuchen Sie die folgenden Formeln mit Hilfe des Resolutionsverfahrens auf Erfüllbarkeit!

(a) $(p \vee q \vee r) \wedge \neg r \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee q)$. (2 P)

(b) $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p)$. (2 P)

Aufgabe 4: Es seien $\Phi \subseteq \mathrm{Form}(P)$ und $\psi, \varphi, \chi \in \mathrm{Form}(P)$. Beweisen oder widerlegen Sie (durch Angabe eines Gegenbeispiels) die folgenden Behauptungen.

(a) Gilt $\Phi \Vdash \neg\varphi$ und $\Phi \Vdash (\varphi \to \psi) \to \varphi$, so gilt auch $\Phi \Vdash \chi$. (2 P)

(b) Ist $\Phi \Vdash \varphi \vee \psi$, so gilt $\Phi \Vdash \chi \vee \varphi$ oder $\Phi \Vdash \chi \vee \psi$. (2 P)

Aufgabe 5: Die logische Signatur Σ_l sei durch die folgenden Angaben bestimmt:

$$\Sigma_l \quad \begin{array}{ll} \textbf{sorts}: & \textit{punkt}, \textit{gerade} \\ \textbf{opns}: & \emptyset \\ \textbf{rels} & \textit{Auf}: \langle \textit{punkt gerade} \rangle \\ & \textit{Parallel}: \langle \textit{gerade gerade} \rangle \end{array}$$

Es seien ferner $X_{punkt} = \{x, y, z, x_1, \ldots\}$, $X_{gerade} = \{f, g, h, f_1, \ldots\}$. Gegeben sei weiter die Substitution $[\sigma]$, für die Folgendes gilt: (1.) $\sigma(x) = y$, (2.) $\sigma(y) = x$, (3.) $\sigma(g) = h$ und (4.) $\sigma(h) = f$.

(a) Ermitteln Sie, ob $[\sigma]$ für die Formel φ_1:

$$\forall x.\forall y.\forall g.\Big(Auf(x, g) \wedge Auf(y, h) \rightarrow x = y \vee \exists h.(h \neq g \wedge Auf(x, h))\Big)$$

zulässig ist und geben Sie im positiven Falle $\varphi_1[\sigma]$. Bestimmen Sie im negativen Falle eine geeignete zulässige Umbenennung $\langle r \rangle$ und geben Sie dann $\varphi_1\langle r \rangle[\sigma]$ an! (2 P)

(b) Verfahren Sie ebenso mit der folgenden Formel φ_2! (2 P)

$$Auf(x, g) \wedge Auf(y, g) \rightarrow \exists h.(Auf(z, h) \wedge Parallel(h, g)).$$

Aufgabe 6: Gegeben sei wieder die Signatur Σ_l der vorigen Aufgabe

(a) Geben Sie eine Struktur A_l zu Σ_l an, in der folgende Formeln gültig sind: (2 P)

$\varphi_1 : \exists x.\exists y.(x \neq y \wedge Auf(x, g) \wedge Auf(x, h) \wedge Auf(y, g) \wedge Auf(y, h)) \rightarrow g = h,$

$\varphi_2 : \exists x.\exists y.\exists z.\Big(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \neg\exists g.(Auf(x, g) \wedge Auf(y, g) \wedge Auf(z, g))\Big),$

$\varphi_3 : \exists g.(Auf(x, g) \wedge Auf(y, g)),$

$\varphi_4 : \neg Auf(x, g) \rightarrow \exists h.\forall f.\big(Parallel(f, g) \wedge Auf(x, f) \leftrightarrow f = h\big),$

$\varphi_5 : \exists g.\exists h.\neg Parallel(g, h),$

$\varphi_6 : Parallel(f, g) \rightarrow Parallel(g, f),$

$\varphi_7 : Parallel(f, g) \wedge Parallel(g, h) \rightarrow Parallel(f, h),$

(b) Beweisen Sie, dass die von Ihnen gewählte Struktur A Modell der Formel $Parallel(g, g)$ ist. (2 P)

Aufgabe 7: Gegeben sei eine Signatur Σ mit einer Sorte s und einem einstelligen Relationssymbol P. $X_\Sigma = (X_s)$ sei eine zu Σ passende Familie von Variablenmengen und $x, y \in X_s$. Untersuchen Sie die folgenden Formeln auf Allgemeingültigkeit (Beweis oder Gegenbeispiel, beim Gegenbeispiel reicht die Angabe einer Struktur).

(a) $\exists x.\forall y.(P(y) \leftrightarrow x = y)$. (2 P)

(b) $\exists x.((\exists y.P(y)) \rightarrow P(x))$. (2 P)

Aufgabe 8: Sei Σ eine beliebige Signatur.

(a) Zeigen Sie, dass für je zwei Sätze φ und ψ Folgendes gilt: (2 P)

$$\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \subseteq \mathrm{Mod}_\Sigma(\psi) \Rightarrow \mathrm{Mod}_\Sigma(\neg\psi) \subseteq \mathrm{Mod}_\Sigma(\neg\varphi).$$

(b) Geben Sie zwei Formeln φ und ψ an mit

$$\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \subseteq \mathrm{Mod}_\Sigma(\psi), \text{ aber } \mathrm{Mod}_\Sigma(\neg\psi) \not\subseteq \mathrm{Mod}_\Sigma(\neg\varphi).$$

(Hinweis: Offensichtlich kann wegen (a) mindestens eine der beiden Formeln kein Satz sein.) Die Signatur ist frei wählbar. Begründen Sie, warum φ und ψ das Gewünschte leisten. (2 P)