B. Mahr, S. Bab, T. Noll WS 04/05

Klausur TheGI 3

15. Februar 2004

Name, Vorname: ______________________ Matr.-Nr.: ______________________

Übung im WS ________

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte:									

Summe: **Klausurnote:**

Punkte: Insgesamt sind in der Klausur 50 reguläre sowie 5 Bonuspunkte zu erreichen. Die Klausur gilt mit Erreichen von mindestens 25 Punkten als bestanden.

Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Form der Abgabe: Bitte laßt Euer Exemplar der Klausur geklammert, schreibt aber bitte dennoch auf jedes von Euch benutzte Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer.

Hilfsmittel: Als Hilfsmittel ist ausschließlich ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt in eigener Handschrift (keine Kopien) zugelassen, keine Mobiltelefone, PDAs, iPODs, Bücher, Hefter, Kopien, etc.

Hinweis: Verschafft Euch zunächst einen Überblick über alle Aufgaben und beginnt mit der Aufgabe, die Euch am wenigsten aufwendig erscheint.

Aufgabe 1 *(5 Punkte)*

Es seien $P = \{p, q\}$ eine Menge von Aussagensymbolen und $\varphi, \psi \in \text{Form}(P)$. Gib **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

Behauptung	wahr?	falsch?
Nach dem Koinzidenzlemma der Aussagenlogik gilt für zwei beliebige Belegungen $B_1, B_2 : P \to \{T, F\}$: $(B_1 \models \varphi$ und $B_2 \models \varphi) \Rightarrow B_1(p) = B_2(p)$ für alle $p \in Symb(\varphi)$.		
Es gilt: $B^*(p \to (q \to p)) = f_{\mathrm{T}}$.		
Da $\varphi \equiv \psi$ genau dann gilt, wenn $\varphi \Vdash \psi$ und $\psi \Vdash \varphi$ gelten, kann man mit Hilfe des Deduktionstheorems der Aussagenlogik auf $\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow\, \models \varphi \leftrightarrow \psi$ schließen.		
Sei $M_{\text{KNF}} \subseteq Form(P)$ die Menge aller aussagenlogischen Formeln in konjunktiver Normalform. Dann gilt: Für alle $\varphi \in Form(P)$ existiert ein $\psi \in M_{\text{KNF}}$ mit $\varphi \equiv \psi$.		
Zu jeder Formel φ existieren mehr als eine, aber nicht unendlich viele äquivalente Formeln in disjunktiver Normalform.		
Eine Junktorbasis J heiße minimal, wenn jede echte Untermenge $J' \subset J$ keine Junktorbasis mehr ist. Mit dieser Definition ist die Junktorbasis $\{\neg, \wedge, \vee\}$ minimal.		
Wenn zu einem korrekten und vollständigen Hilbert-Kalkül $(H, \vdash_H)$ beliebige weitere Regeln hinzugefügt werden, so bleibt auch der daraus resultierende Kalkül stets korrekt und vollständig.		
Es existieren sowohl unendlich viele korrekte und vollständige Hilbert-Kalküle, als auch unendlich viele korrekte und vollständige Sequenzen-Kalküle.		
Sei S_φ eine Klauselrepräsentation einer Formel φ. Lassen sich aus S_φ Klauseln der Form $\{p, \neg p\}$ resolvieren, so sagt die Existenz solcher Klauseln nichts über die Gültigkeit von φ aus (φ kann also sowohl kontradiktorisch als auch erfüllbar sein).		
Lassen sich aus einer Klauselrepräsentation einer beliebigen Formel die Klauseln $\{p, \neg q\}$ und $\{\neg p, q\}$ resolvieren, so kann durch zweimaliges weiteres Resolvieren mit diesen Klauseln die leere Klausel resolviert werden.		

Aufgabe 2 *(3+2+1 = 6 Punkte)*

Sei $P = \{p, q\}$ eine Menge von Aussagensymbolen.

(a) Ergänze bitte die folgende Wahrheitstafel! In der Formel dieser Wahrheitstafel (im folgenden als φ bezeichnet) fehlen noch Junktoren aus $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ und Vorkommnisse von Aussagensymbolen aus $\mathrm{Symb}(\varphi) = \{p, q\}$. In jede Lücke gehört nur **ein** Zeichen! Ergänze bitte **alle** der 26 fehlenden Wahrheitswerte. (Und noch mal der Tip: **Die Junktoren** $\top, \bot$ **sind in der gesuchten Formel nicht enthalten.**)

p	q	(	…	…	…	)	…	(	…	$\neg$	…	$\vee$	…	)
T	T						T		T					
T	F		F	F	T		F						F	
F	T						F		F					
F	F						T							

(b) Sei φ die Formel aus der Wahrheitstafel in Teilaufgabe (a). Gib sowohl eine konjunktive als auch eine disjunktive Normalform für φ an:

$\varphi \equiv$ .... (DNF)

$\varphi \equiv$ .... (KNF)

Platz für Nebenrechnungen:

(c) Entscheide, ob die folgenden Formeln in DNF, in KNF, in DNF und KNF zugleich oder weder in DNF, noch KNF vorliegen. Bei diesem Aufgabenteil werden für falsche Antworten *keine* Punkte abgezogen. Für jede richtig angekreuzte Zeile gibt es einen halben Punkt.

Formel	DNF?	KNF?
$p \wedge \neg p$		
$\neg\neg p \vee \neg\neg q$		

Aufgabe 3 *(5 Punkte + 1 Bonuspunkt)*

Es seien P eine Menge von Aussagensymbolen mit $a, b, p, q, r \in P$. Gegeben sei ein Hilbertkalkül H mit den folgenden fünf Hilbertregeln:

$$\frac{}{p \to (q \to p)}\ (\varrho_1) \qquad \frac{}{(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))}\ (\varrho_2)$$

$$\frac{}{(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)}\ (\varrho_3) \quad \frac{q, p \to q}{p}\ (\varrho_4) \qquad \frac{p \to q}{q \to p}\ (\varrho_5)$$

1. Die Regel ϱ_5 ist nicht korrekt. Weise dies bitte nach, indem Du die folgende Argumentation vervollständigst:
   Die schematisierbare Regel ϱ_5 wäre genau dann korrekt, wenn die nachstehende Folgerung stimmte:

   ....

   Wenn diese Folgerung jedoch stimmte, dann wäre nach dem Deduktionstheorem die folgende Implikation

   ....

   eine .... Formel. Wie man aber in der ... Zeile der nachstehenden Wahrheitstabelle in der Spalte zum Hauptjunktor (bitte Umranden) sehen kann, wird diese Eigenschaft verletzt.

p	q	(... ... ...) ... (... ... ...)
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

   Also kann die Regel ϱ_5 nicht korrekt sein.

2. Eine weitere Regel ist nicht korrekt.
   - Welche ist es? ....
   - Wie heisst sie (1 Bonuspunkt)? ....

3. Ergänze den folgenden Hilbertbeweis im Kalkül H für den Modus Ponens $\{a, a \to b\} \Vdash b$:

$$\cfrac{\cfrac{\ldots\ldots \to \ldots\ldots}{\ldots\ldots\ ,\ \ldots\ldots \to \ldots\ldots}\ (\varrho_5)}{b}\ (\varrho_4)$$

4. Ist der Hilbertkalkül H vollständig? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*

Ergänze den nachstehenden Korrektheitsnachweis für die Sequenzenregel:

$$\frac{\Delta \cup \{p \vee q\} \rhd s}{\Delta \cup \{p \vee r, q \vee \neg r\} \rhd s}\ (\sigma)$$

Bekanntlich steht Δ für eine endliche Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \subset Form(P)$ und p, q, r sind Aussagenvariablen aus P. Der Nachweis der Korrektheit der Sequenzenregel σ läuft auf den Beweis der folgenden Aussage hinaus:

Wenn die Folgerungsbehauptung

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Vdash s \qquad (1)$$

gilt, dann gilt auch die Folgerungsbehauptung

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Vdash s \qquad (2)$$

Beweis: Sei $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ die Konjunktion der Formeln in Δ.
Definitionsgemäß stimmt die Folgerung (2) genau dann, wenn für jede Belegung $B : P \to \{T, F\}$ mit $B \models \varphi \wedge (\ldots\ldots\ldots) \wedge (\ldots\ldots\ldots)$ auch $B \models \ldots$ gilt.

Sei also B eine Belegung mit $B \models \varphi \wedge (\ldots\ldots\ldots) \wedge (\ldots\ldots\ldots)$. Dann gilt sowohl $B \models \varphi$ als auch $B \models (\ldots\ldots\ldots) \wedge (\ldots\ldots\ldots)$. Solange neben $B \models \varphi$ zusätzlich eine der beiden Bedingungen $B \models \ldots$ oder $B \models \ldots$ erfüllt ist, gilt auch $B \models \ldots \vee \ldots$ und wir können die Voraussetzung (1) benutzen, um auf $B \models \ldots$ zu schließen.

Nun berücksichtigen wir, daß $B^*((p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)) = \ldots$ gilt und dabei müssen wir lediglich noch den Fall betrachten, wo $B(p) = B(q) = F$ sind. Wir zeigen, daß dieser Fall gar nicht eintreten kann. Für $B(r) = T$ würde nämlich gelten:

$$\ldots \;=\; B^*((p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)) \;=\; f_\wedge(f_\vee(\ldots, \ldots), f_\vee(\ldots, \ldots)) \;=\; f_\wedge(\ldots, \ldots) \;=\; \ldots.$$

Widerspruch! Analog würde für $B(r) = F$ gelten:

$$\ldots \;=\; B^*((p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)) \;=\; f_\wedge(f_\vee(\ldots, \ldots), f_\vee(\ldots, \ldots)) \;=\; f_\wedge(\ldots, \ldots) \;=\; \ldots.$$

Widerspruch! Damit wurde die obige Aussage bewiesen und somit auch die Korrektheit der Sequenzenregel σ nachgewiesen.

Aufgabe 5 *(5 Punkte)*

Durch Vervollständigen des folgenden Beweises mit Hilfe des Resolutionsverfahrens und kleine (klausurrelevante) Abschweifungen überprüfen wir nachstehende Folgerungsbehauptung:

$$\{\neg(\neg p \to q), p \leftrightarrow \neg r\} \Vdash \neg p \wedge \neg q \wedge r$$

Beweis: Zunächst muß die Folgerung in eine für das Resolutionsverfahren sinnvolle Form äquivalent umgeformt werden. Gib bitte diesen ersten Schritt an:

$$\{\neg(\neg p \to q), p \leftrightarrow \neg r\} \Vdash \neg p \wedge \neg q \wedge r$$

$$\Leftrightarrow \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\} \Vdash \ldots\ldots\ldots$$

Im folgenden bezeichne Φ die Prämissenmenge dieser neuen Folgerung. Welche durch das Resolutionsverfahren nachweisbare Eigenschaft von Φ muß vorliegen, damit die Folgerung korrekt ist?

....

Welche Klausel muß aus einer Klauselrepräsentation S_Φ von Φ resolvierbar sein, um dieses zu zeigen?

....

Um das Resolutionsverfahren anwenden zu können, müssen nun zu den Formeln aus Φ logisch äquivalente Formeln in konjunktiver Normalform angegeben werden. Gib zunächst KNFs für alle Formeln aus Φ an, die sich bei Anwendung der Wahrheitstafelmethode ergeben. (Hinweis: Es wird **nicht** verlangt, alle Zeilen der Wahrheitstafeln hinzuschreiben. Es genügen diejenigen Zeilen, die für das **Ablesen der KNF relevant** sind. Falls Du es dennoch vorziehst, die Tabellen vollständig auszufüllen, dann umrande bitte die für das Ablesen der KNF relevanten Zeilen).

T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

T	T	T	
T	T	F	
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	F	T	
F	F	F	

$\neg(\neg p \to q) \quad \equiv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$p \leftrightarrow \neg r \quad \equiv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \equiv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Die KNF für die Formel $\neg(\neg p \rightarrow q)$ lässt sich durch äquivalente Umformung vereinfachen:

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \equiv \neg q \wedge \neg p$

****

Hier unterbrechen wir den Beweis mit einer weiteren kleinen Werbung für das Äquivalente Umformen. Zeige bitte, wie man die KNF $\neg q \wedge \neg p$ auch ohne Wahrheitstabelle aus der Formel $\neg(\neg p \rightarrow q)$ gewinnen kann:

$\neg(\neg p \rightarrow q) \equiv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \equiv \neg q \wedge \neg p$

****

Wir erhalten also folgende Klauselrepräsentation für Φ

$$S_\Phi = \{\{p, r\}, \{p, q, \neg r\}, \{\neg p\}, \{\neg p, \neg r\}, \{\neg q\}\}$$

Bitte gib im folgenden den für den abschließenden Beweis der Folgerung nötigen Resolutionsbeweis an:

Wir haben also gezeigt, daß die Folgerungsbehauptung

$$\{\neg(\neg p \rightarrow q), p \leftrightarrow \neg r\} \Vdash \neg p \wedge \neg q \wedge r$$

stimmt. $\square$

Aufgabe 6 *(5 Punkte)*

Gegeben sei die Signatur $\Sigma = (S, OP, REL)$ mit $S = \{s\}$, $OP = \emptyset$ und $REL = \{G, P, Q\}$ mit $G : \langle s\, s \rangle$, $P : \langle s \rangle$ und $Q : \langle s \rangle$. Weiterhin sei die Variablenmenge $X_s = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$ gegeben, es sei $X = (X_s)$ und es sei $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$. Gib **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

Behauptung	wahr?	falsch?
Sei $\mathcal{C}$ eine Menge von Σ-Strukturen. Die zugehörige Theorie $Th_\Sigma(\mathcal{C})$ besteht aus allen Formeln, die bei allen $A \in \mathcal{C}$ gültig sind.		
$\sigma(x) = y$, $\sigma(y) = x$ ist zulässig für $\varphi = \exists x.G(x, y)$.		
Es gilt: $\exists x.G(x, y) \Vdash \exists x.G(x, x)$.		
Es gilt: $\mathrm{Mod}_\Sigma(P(x) \vee Q(x)) = \mathrm{Mod}_\Sigma(P(x)) \cup \mathrm{Mod}_\Sigma(Q(x))$.		
Es gilt: $\forall x.\varphi \equiv \neg\exists x.\neg\varphi$.		
Es gilt: $\forall x.\varphi \leftrightarrow \neg\exists x.\neg\varphi$ ist tautologisch.		
Die Formel $P(y) \wedge \neg\forall x.P(x)$ ist kontradiktorisch.		
Die Formel $\neg\forall y.\neg(P(y) \wedge \neg\forall x.P(x))$ ist erfüllbar.		
Die Gültigkeitsrelation $\models$ ist symmetrisch und transitiv.		
Für alle Formelmengen $\Phi, \Phi', \Psi \subseteq \mathrm{Form}_\Sigma(X)$ gilt: Wenn $\Phi \Vdash \Psi$ und $\Phi \subseteq \Phi'$, dann auch $\Phi' \Vdash \Psi$.		

Aufgabe 7 *(3 + 3 = 6 Punkte + 2 Bonuspunkte)*

Gegeben sei folgende logische Signatur Σ

$$\begin{array}{ll} sorts: & form \\ opns: & verum, falsum : \to form \\ & neg : form \to form \\ & und, oder, impl, gdw : form\, form \to form \\ & divers : form\, form\, form \to form \\ rels: & Folgt : < form\, form > \\ & Metafolgt : < form\, form\, form\, form > \\ & Metametafolgt : < form\, form\, form\, form\, form\, form\, form\, form > \end{array}$$

und die Variablenmenge $X_{form} = P = \{p, q, r\}$. $t_1, \ldots, t_8$ seien im folgenden beliebige Terme aus $T_{\Sigma,form}(X_{form})$. Für die Σ-Struktur A gelte $A_{form} = \{T, F\}$ und die einzelnen Operationen seien durch die üblichen Wahrheitswertefunktionen der Aussagenlogik interpretiert:

$$verum_A = f_\top, falsum_A = f_\bot, neg_A = f_\neg, und_A = f_\wedge, oder_A = f_\vee, impl_A = f_\to, gdw_A = f_\leftrightarrow.$$

1. Definiere die dreistellige Operation $divers_A : \{T, F\} \times \{T, F\} \times \{T, F\} \to \{T, F\}$,

$$\begin{array}{ll} divers_A(T,T,T) := \ldots & divers_A(F,T,T) := \ldots \\ divers_A(T,T,F) := \ldots & divers_A(F,T,F) := \ldots \\ divers_A(T,F,T) := \ldots & divers_A(F,F,T) := \ldots \\ divers_A(T,F,F) := \ldots & divers_A(F,F,F) := \ldots \end{array}$$

   derart, dass die Konjunktion $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ der drei folgenden Formeln in der Struktur A gültig ist:

   - $\varphi_1 := \forall p.\forall q.\forall r(p = q \wedge p \neq r \to divers(p, q, r) = gdw(p, q))$
   - $\varphi_2 := \forall p.\forall q.\forall r.((divers(p, q, r) = divers(q, p, r) \wedge divers(p, q, r) = divers(p, r, q))$
   - $\varphi_2 := \forall p.\exists q.divers(p, p, p) \neq divers(p, p, q)$

2. Es sei $Folgt_A = \{(F, F), (F, T), (T, T)\}$. Es sei $Metafolgt_A$ so definiert, dass gilt:

$$A \models Metafolgt(t_1, t_2, t_3, t_4) \leftrightarrow (Folgt(t_1, t_2) \to Folgt(t_3, t_4))$$

   Die Menge $Metafolgt_A$ hat 13 Elemente. Von den 16 möglichen Viertupeln (T, T, T, T), (T, T, T, F), (T, T, F, T), ..., (F, F, F, F) fehlen also in $Metafolgt_A$ genau drei. Welche sind es?

   ...., ..., ...

3. *(2 Bonuspunkte)*: Weiterhin sei $Metametafolgt_A$ so definiert, dass gilt:

$$\begin{array}{ll} A \models & Metametafolgt(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8) \\ & \leftrightarrow (Metafolgt(t_1, t_2, t_3, t_4) \to Metafolgt(t_5, t_6, t_7, t_8)) \end{array}$$

   Wieviele Elemente hat die Menge $Metametafolgt_A$? Es sind genau $2^8 - \ldots\ldots = \ldots\ldots$.

Hinweis zu 2 (Beziehung zur Aussagenlogik): Wenn man Terme t_i als aussagenlogische Formeln φ_{t_i} auffasst, dann bedeutet die Gültigkeit der Formel

$$Metafolgt(t_1, t_2, t_3, t_4) \to Metafolgt(t_5, t_6, t_7, t_8)$$

in der Struktur A dasselbe wie folgende Behauptung der Aussagenlogik:

Wenn aus der Folgerung $\varphi_{t_1} \Vdash \varphi_{t_2}$ die Folgerung $\varphi_{t_3} \Vdash \varphi_{t_4}$ (meta)folgt,
dann (meta)folgt aus der Folgerung $\varphi_{t_5} \Vdash \varphi_{t_6}$ auch die Folgerung $\varphi_{t_7} \Vdash \varphi_{t_8}$.

Zur Not kannst Du also die Antwort zu 2. mit einer Metatabelle (auf einem Notizblatt !!!) herausfinden. Überlege aber vorher gut, ob Du soviel Zeit hast und denk lieber einen Moment nach.

Aufgabe 8 *(6 Punkte)*

Gegeben sei folgende logische Signatur Σ

$$\begin{array}{ll} \textit{sorts}: & s \\ \textit{opns}: & f, g : s \to s \\ \textit{rels}: & P :< s\ s > \end{array}$$

und die Variablenmenge $X_s = \{x\}$. Vervollständige den nachstehenden Beweis für die Folgerung

$$\forall x. (P(x, x) \vee f(x) = g(x)) \Vdash (\forall x. P(x, x)) \vee (\exists x. f(x) = g(x))$$

Beweis: Indem wir zeigen, daß die Implikation

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \to \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (*)$$

eine .... Formel ist, ergibt sich die Richtigkeit der obigen Folgerungsbehauptung aus dem Deduktionstheorem der Prädikatenlogik.

Sei A eine beliebige Σ-Struktur und $\beta : \ldots \to \ldots$ eine beliebige, aber feste Variablenbelegung. Wenn für die linke Seite der Implikation $(*)$ die Bestätigung

$(A, \beta) \models \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

zutrifft, so ist dies ist gleichbedeutend damit, daß für jedes einzelne .... die folgende Bestätigung zutrifft:

$(A, \ldots[\ldots/a]) \models \ldots\ldots\ldots\ldots \vee f(x) = g(x)$

Dies ist wiederum gleichbedeutend damit, daß für jedes einzelne .... eine der beiden Bestätigungen zutrifft:

$\ldots\ldots\ldots \models \ldots\ldots\ldots$ oder $\ldots\ldots\ldots \models \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Daraus können wir Folgendes schliessen: Für jedes einzelne .... trifft sogar immer die erste der beiden Bestätigungen (also ....) oder es muß mindestens ein .... geben, für das die zweite Bestätigung zutrifft (also $(A, \beta_{[x/a]}) \models f(x) = g(x)$).

Der erste Fall ist seinerseits gleichbedeutend mit der Bestätigung $(A, \beta) \models \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, während der zweite Fall der Bestätigung $(A, \beta) \models \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ gleichkommt.

Daß aber der eine oder der andere Bestätigunsfall eintritt (oder beide), bedeutet, daß die Disjunktion der betreffenden Formeln, d.h. die rechte Seite der Implikation $(*)$ bestätigt wird:

$(A, \beta) \models \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Damit ist gezeigt, daß die Implikation $(*)$ allgemeingültig ist und die Folgerung bewiesen. q.e.d.

Aufgabe 9 *(2,5 + 2,5 + 3 = 8 Punkte + 2 Bonuspunkte)*

Gegeben sei die folgende logische Signatur Σ_{Graph}

$$\begin{array}{ll} sorts: & knoten, kanten \\ opns: & anfang, ende : kanten \to knoten \\ rels: & Pfad :< knoten\, knoten > \end{array}$$

und die Variablenmenge $X = (X_{knoten}, X_{kanten})$ mit $X_{knoten} = \{a, b, c, a_1, a_2, \ldots\}$ und $X_{kanten} = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$.

(a) Im folgenden soll eine Formel $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ so konstruiert werden, daß gilt:

$\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) = \{A \in \mathrm{Strukt}_{\Sigma_{Graph}} \mid \mathrm{Pfad}_A$ beschreibt eine Pfadrelation auf Graphen im üblichen Sinne$\}$.

Bitte gib für die folgenden Aussagen Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ so an, daß die Modellklassen dieser Formeln die Strukturen A enthalten, für die Pfad_A die beschriebene Eigenschaft erfüllt.

Hinweis: Die Funktionen *anfang* und *ende* sollen hierbei im eigentlichen Sinne verstanden werden, *anfang* weist einer Kante den Anfangsknoten, *ende* einer Kante den Endknoten zu.

(1) Eine jede Kante von einem Knoten v_1 zu einem Knoten v_2 beschreibt einen Pfad von v_1 nach v_2:

$\varphi_1 \quad = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(2) Die Relation Pfad ist transitiv.

$\varphi_2 \quad = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(3) Wenn zwischen zwei Knoten v_1 und v_2 ein Pfad verläuft, so gibt es entweder eine Kante zwischen v_1 und v_2 oder der Pfad von v_1 nach v_3 verläuft über mindestens einen weiteren Knoten v_3.

$\varphi_1 \quad = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(b) (2 Zusatzpunkte): Welche Formeln enthält die folgende Theorie?

$Th_{\Sigma_{Graph}}(\mathrm{Mod}_\Sigma(\emptyset)) = \{\varphi \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$