Robering, Niemann, Frantzen

WS 99/00

Klausur TheGI 3

Name, Vorname: ______________________ Matr.-Nr.: ______________________

Übung im WS 19___/___

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte:								

Übungsnote: **Klausurnote:** **Gesamtnote:**

Aufgabe 1

(a) Untersuche mit Hilfe der Wahrheitstafelmethode die folgende Formel auf Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit:
$\varphi = ((p \leftrightarrow \top) \to q) \vee (q \wedge \neg p)$ *(2 P)*

(b) Ergänze folgende Wahrheitstafel! Die Formel dieser Tafel φ ist mit Hilfe der Junktoren aus $\{\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ gebildet, und es ist $\mathrm{Symb}(\varphi) = \{p, q\}$.
In jede Lücke gehört nur **ein** Zeichen! *(2 P)*

p	q	$(p$	$\to$	$\ldots$	$\ldots)$	$\ldots$	$\neg$	$(\ldots$	$\to$	$q)$
T	T		F			T	F			
T	F		T		F	F	F			
F	T		T			F	F			
F	F		T			F	F			

Aufgabe 2

Gegeben die Formel $\varphi = ((p \leftrightarrow \top) \to q) \vee (q \wedge \neg p)$ aus Aufgabe 1(a).

(a) Gib eine disjunktive Normalform für φ an. *(2 P)*

(b) Gib eine konjunktive Normalform für φ an. *(2 P)*

Aufgabe 3

Untersuche die folgenden Formeln mit Hilfe des Resolutionsverfahrens auf Erfüllbarkeit:

(a) $\varphi = (q \to p) \wedge (p \to r) \wedge (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge r)$, *(2 P)*

(b) $\psi = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge r$. *(2 P)*

Aufgabe 4

Sei P eine Menge von Aussagensymbolen. Beweise oder widerlege (durch Angabe eines Gegenbeispiels) die folgenden Behauptungen über $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{Form}(P)$.

(a) Wenn $\models \varphi \to \chi \vee \psi$, dann $\neg\varphi \Vdash \neg\chi \wedge \neg\psi$. *(2 P)*

(b) Es gilt $\underbrace{\neg\chi \Vdash \psi \vee \neg\varphi}_{T}$ genau dann, wenn $\{\neg\psi, \varphi\} \Vdash \chi$. *(2 P)*

$\psi =_{def} \bot$

$\varphi =_{def} \bot$

.n den Aufgaben 5 und 6 sei die logische Signatur Σ durch die folgenden Angaben bestimmt:

$\Sigma =$	
sorts:	*st, na*
opns:	$conc : st\ st \to st$
	$inv : st \to st$
	$\# : st \to na$
rels:	$pal : \langle st \rangle$
	$lt : \langle na\ na \rangle$

Die Familie von Variablenmengen sei $X = (X_{st}, X_{na})$ mit $X_{st} = \{u, v, w, u_1, v_1, w_1, \ldots\}$ und $X_{na} = \{m, n, m_1, n_1, \ldots\}$.

Aufgabe 5

Gegeben sei die Substitution $[\sigma]$ mit $\sigma(v) = conc(v, w)$, $\sigma(w) = inv(w)$, $\sigma(m) = \#(w)$ und $\sigma(n) = m$.

(a) Prüfe, ob $[\sigma]$ für folgende Formel zulässig ist:

$$\varphi_1 = \quad \forall v.(\forall w.\exists n.(lt(\#(w), n) = m) \to (n = \#(inv(v))))$$

Wenn ja, gib $\varphi_1[\sigma]$ an. Wenn nein, bestimme eine zulässige Umbenennung $\langle r \rangle$, so dass $\varphi_1[\sigma]\langle r \rangle$ zulässig wird und gib $\varphi_1[\sigma]\langle r \rangle$ an (Achtung: Umbenennung **vor** Substitution). *(2 P)*

(b) Wie bei (a), nur mit der Formel φ_2: *(2 P)*

$$\exists m.(m = \#(inv(v))) \to \forall v.(pal(v) \to \exists n.(\#(w) \neq m)).$$

Aufgabe 6

(a) Gib eine Σ-Struktur an, in der folgende Formeln gültig sind: *(3 P)*

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall v.\forall w.(conc(v, w) \neq v \ \wedge \ conc(v, w) \neq w) \\
\varphi_2 &= \neg\forall v.pal(v) \wedge \exists w.pal(w) \\
\varphi_3 &= pal(v) \to inv(v) = v \\
\varphi_4 &= lt(\#(v), \#(conc(v, w)) \\
\varphi_5 &= \forall v.\neg(lt(\#(v), \#(inv(v))
\end{aligned}$$

(b) Beweise die Gültigkeit der Formel φ_5 in deiner Struktur (Auswertung!). *(2 P)*

Aufgabe 7

Gegeben sei die logische Signatur $\Sigma = (S, OP, R)$ mit $S = \{s\}$, $OP = \emptyset$, $R = \{P, Q\}$, wobei $P : \langle s \rangle$, $Q : \langle s \rangle$. $X = (X_s)$ mit $X_s = \{x\}$ soll eine zu Σ passende Familie von Variablenmengen sein. Untersuche die folgenden Formeln auf Allgemeingültigkeit (Beweis oder Gegenbeispiel; beim Gegenbeispiel genügt die Angabe einer Struktur):

(a) $\varphi = \forall x.(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x.P(x) \vee \forall x.Q(x))$, *(2 P)*

(b) $\psi = (\forall x.P(x) \vee \forall x.Q(x)) \to \forall x.(P(x) \vee Q(x))$. *(2 P)*

Aufgabe 8

Gegeben seien folgende Formeln:

(a) $\varphi_1 = \forall x.Q(x, x)$ *(Reflexivität)*

(b) $\varphi_2 = \forall x.\forall y.(Q(x, y) \to Q(y, x))$ *(Symmetrie)*

(c) $\varphi_2 = \forall x.\forall y.\forall z.((Q(x, y) \wedge Q(y, z)) \to Q(x, z))$ *(Transitivität)*

Zeige dass keine dieser Formeln Folgerung der anderen beiden ist. (Gib für jedes Formelpaar ein Modell an, das nicht Modell der jeweils dritten Formel ist!) *(3 P)*