

1. Teilleistung TheGI 3

18. Dezember 2013

Name, Vorname: _____

Studiengang (Bsc/Msc/Dipl Inf/Math/...): _____

Versuch-Nr.: _____ Matrikel-Nr.: _____

Los-Nr.:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7
Punkte:							

Summe:

Note:

Punkte: Insgesamt sind in dieser Teilleistung 90 Punkte zu erreichen. Die Teilleistung gilt mit dem Erreichen von mindestens 50% der Punkte als bestanden.

Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 75 Minuten. Zusätzlich gibt es eine Einlesezeit von 15 Minuten.

Form der Abgabe: Bitte lassen Sie Ihr bereitgestelltes Papier geklammert.

Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Für die Antworten darf nur das bereitgestellte Papier verwendet werden.

Los-Nummer: Tragen Sie in das Feld „Los-Nr.“ die Ihnen ausgeteilte Nummer ein. Unter dieser Nummer finden Sie später Ihre erreichten Punkte und Ihre Note.

Diese Seite ist leer.

Aufgabe 1

10 Punkte

Bitte kreuzen Sie bei den folgenden Aussagen jeweils an, ob die Aussage stimmt oder ob sie nicht stimmt.

Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede falsche Antwort 0 Punkte. Jede leere Antwort gibt 0,5 Punkte.

φ ist eine beliebige aussagenlogische Formel und Φ eine beliebige Menge von aussagenlogischen Formeln.

	Aussage	Wahr	Falsch
1.	$(X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)$ ist allgemeingültig.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	$(X \vee Y) \rightarrow (X \wedge Y)$ ist erfüllbar.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	Die Negation einer unerfüllbaren Formel ist allgemeingültig.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	Es gibt eine erfüllbare Formel, deren Negation erfüllbar ist.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	Wenn $\Phi \models \varphi$ gilt, dann gilt $\text{var}(\varphi) \subseteq \text{var}(\Phi)$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
6.	Wenn $\Phi \models \varphi$ gilt, dann ist φ erfüllbar.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
7.	Φ ist erfüllbar gdw. eine endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
8.	Für jede Turingmaschine M gibt es eine Formel, die erfüllbar ist gdw. M das leere Wort akzeptiert.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
9.	Jede entscheidbare Sprache ist in \mathcal{NP} .	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
10.	Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik ist \mathcal{NP} -vollständig.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Aufgabe 2

15 Punkte

HALTEPROBLEM

Eingabe: Eine Turingmaschine \mathcal{M}
Problem: Hält \mathcal{M} auf der leeren Eingabe?

UNIVERSALITÄTSPROBLEM

Eingabe: Eine Turingmaschine \mathcal{M}
Problem: Gilt für alle Eingaben w , dass \mathcal{M} die Eingabe w akzeptiert?

Geben Sie eine Reduktion des Halteproblems auf das Universalitätsproblem an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

5+5+5=15 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- (i) Für alle $\varphi, \psi \in \text{AL}$ gilt: Wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$ gilt, dann gilt $\varphi \equiv \psi$.
- (ii) Für alle $\varphi, \psi \in \text{AL}$ gilt: Es gilt $\varphi \models \psi$ oder $\psi \models \varphi$.
- (iii) Für alle $\varphi, \psi, \chi \in \text{AL}$ gilt: Wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \chi$ gilt, dann gilt $\varphi \models \chi$.

Aufgabe 4

3+3+3=9 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzen.

- (i) $X \rightarrow \perp \equiv \neg X$.
- (ii) $X \wedge (Y \rightarrow Z) \equiv (X \wedge Y) \rightarrow (X \wedge Z)$
- (iii) $X \wedge (X \rightarrow Y) \equiv Y$

Aufgabe 5

3+3+5+5=16 Punkte

- (i) Sei Φ eine endliche Menge von aussagenlogischen Formeln und ψ eine aussagenlogische Formel. Definieren Sie, was es bedeutet, dass $\Phi \models \psi$. Erklären Sie, wie sie $\Phi \models \psi$ mit Hilfe der Resolution beweisen können.
- (ii) Seien C_1 und C_2 aussagenlogische Klauseln. Definieren Sie, was es bedeutet, dass C_1 und C_2 miteinander resolviert werden können, und geben Sie die Definition der Menge der Resolventen von C_1 und C_2 an.
- (iii) Sei C eine Resolvente von C_1, C_2 . Beweisen Sie, dass $\{C_1, C_2\} \models C$.
- (iv) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolution, dass die folgende Formel unerfüllbar ist.

$$(A \vee C) \wedge (\neg C \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee D) \wedge (D \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg D) \wedge (A \vee \neg D).$$

Aufgabe 6

7+8=15 Punkte

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- (i) Geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, sodass es genau eine Belegung $\beta : \{X_1, \dots, X_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ gibt mit $\beta \models \varphi$.
- (ii) Geben sie eine aussagenlogische Formel φ an mit $\text{var}(\varphi) \subseteq \{X_1, \dots, X_n\}$, sodass es genau 2^{n-1} verschiedene Belegungen $\beta : \{X_1, \dots, X_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ gibt mit $\beta \models \varphi$.

Begründen Sie ihre Antworten.

Aufgabe 7

10 Punkte

Ein unendlicher Graph $G := (V, E)$ besteht aus einer unendlichen Knotenmenge V und einer Kantenmenge $E \subseteq \{\{u, v\} : u \neq v, u, v \in V\}$. G ist 2-färbbar, wenn es eine Funktion $c : V \rightarrow \{0, 1\}$ gibt, so dass $c(u) \neq c(v)$ für alle Kanten $\{u, v\} \in E$.

Zeigen Sie, dass ein unendlicher Graph genau dann 2-färbbar ist, wenn bereits jeder endliche Untergraph 2-färbbar ist.