Prof. Dr. Stephan Kreutzer
FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin

WS 13/14

1. Teilleistung TheGI 3

18. Dezember 2013

Name, Vorname: ______________________________

Studiengang (Bsc/Msc/Dipl Inf/Math/...): ______________________________

Versuch-Nr.: ______________ Matrikel-Nr.: ______________

Los-Nr.: [ ]

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7
Punkte:							

Summe: **Note:**

Punkte: Insgesamt sind in dieser Teilleistung 90 Punkte zu erreichen. Die Teilleistung gilt mit dem Erreichen von mindestens 50% der Punkte als bestanden.

Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 75 Minuten. Zusätzlich gibt es eine Einlesezeit von 15 Minuten.

Form der Abgabe: Bitte lassen Sie Ihr bereitgestelltes Papier geklammert.

Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Für die Antworten darf nur das bereitgestellte Papier verwendet werden.

Los-Nummer: Tragen Sie in das Feld „Los-Nr.“ die Ihnen ausgeteilte Nummer ein. Unter dieser Nummer finden Sie später Ihre erreichten Punkte und Ihre Note.

Diese Seite ist leer.

Aufgabe 1 10 Punkte

Bitte kreuzen Sie bei den folgenden Aussagen jeweils an, ob die Aussage stimmt oder ob sie nicht stimmt.

Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede falsche Antwort 0 Punkte. Jede leere Anwort gibt 0,5 Punkte.

φ ist eine beliebige aussagenlogische Formel und Φ eine beliebige Menge von aussagenlogischen Formeln.

	Aussage	Wahr	Falsch
1.	$(X \wedge Y) \to (X \vee Y)$ ist allgemeingültig.	⊗	○
2.	$(X \vee Y) \to (X \wedge Y)$ ist erfüllbar.	⊗	○
3.	Die Negation einer unerfüllbaren Formel ist allgemeingültig.	⊗	○
4.	Es gibt eine erfüllbare Formel, deren Negation erfüllbar ist.	⊗	○
5.	Wenn $\Phi \models \varphi$ gilt, dann gilt $\mathrm{var}(\varphi) \subseteq \mathrm{var}(\Phi)$	○	⊗
6.	Wenn $\Phi \models \varphi$ gilt, dann ist φ erfüllbar.	○	⊗
7.	Φ ist erfüllbar gdw. eine endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.	○	⊗
8.	Für jede Turingmaschine M gibt es eine Formel, die erfüllbar ist gdw. M das leere Wort akzeptiert.	⊗	○
9.	Jede entscheidbare Sprache ist in $\mathcal{NP}$.	○	⊗
10.	Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik ist $\mathcal{NP}$-vollständig.	⊗	○

Aufgabe 2 15 Punkte

HALTEPROBLEM	
Eingabe:	Eine Turingmaschine $\mathcal{M}$
Problem:	Hält $\mathcal{M}$ auf der leeren Eingabe?

UNIVERSALITÄTSPROBLEM	
Eingabe:	Eine Turingmaschine $\mathcal{M}$
Problem:	Gilt für alle Eingaben w, dass $\mathcal{M}$ die Eingabe w akzeptiert?

Geben Sie eine Reduktion des Halteproblems auf das Universalitätsproblem an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 2

Wir geben eine Reduktion f an, die Instanzen des Halteproblems übersetzt in Instanzen des Universalitätsproblems. Für eine Instanz M des Halteproblems definieren wir $f(M) := M'$, wobei M' die Maschine ist, die auf der Eingabe w folgendes macht:

(i) Simuliere M auf der leeren Eingabe.

(ii) Falls die Simulation hält, akzeptiere.

Die Funktion f ist damit berechenbar. Falls M auf der leeren Eingabe hält, dann akzeptiert die Maschine M' jede Eingabe w. Falls M auf der leeren Eingabe nicht hält, dann hält auch M' nicht an, weil die Simulation von M nicht hält. Das heißt insbesondere, dass M' dann keine Eingabe w akzeptiert, also eine Negativ-Instanz des Universalitätsproblems ist.

Wir haben also $M \in$ HALTEPROBLEM genau dann, wenn $f(M) \in$ UNIVERSALITÄTSPROBLEM und damit die gewünschte Reduktion.

Aufgabe 3 5+5+5=15 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$ gilt: Wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$ gilt, dann gilt $\varphi \equiv \psi$.

(ii) Für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$ gilt: Es gilt $\varphi \models \psi$ oder $\psi \models \varphi$.

(iii) Für alle $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{AL}$ gilt: Wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \chi$ gilt, dann gilt $\varphi \models \chi$.

Aufgabe 4 3+3+3=9 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzen.

(i) $X \to \bot \equiv \neg X$.

(ii) $X \wedge (Y \to Z) \equiv (X \wedge Y) \to (X \wedge Z)$

(iii) $X \wedge (X \to Y) \equiv Y$

Lösung zu Aufgabe 4

(i) Stimmt. Wenn $\beta(X) = 0$ ist, dann sind unter β beide Seiten wahr. Wenn $\beta(X) = 1$ ist, dann sind unter β beide Seiten falsch.

(ii) Falsch. Wähle $\beta(X) = 0$ und den Rest beliebig. Dann ist die linke Seite unter β falsch, die rechte Seite wahr.

(iii) Falsch. Wähle $\beta(X) = 0$, $\beta(Y) = 1$. Dann ist die linke Seite unter β falsch, die rechte Seite wahr.

Aufgabe 5 3+3+5+5=16 Punkte

(i) Sei Φ eine endliche Menge von aussagenlogischen Formeln und ψ eine aussagenlogische Formel. Definieren Sie, was es bedeutet, dass $\Phi \models \psi$. Erklären Sie, wie sie $\Phi \models \psi$ mit Hilfe der Resolution beweisen können.

(ii) Seien C_1 und C_2 aussagenlogische Klauseln. Definieren Sie, was es bedeutet, dass C_1 und C_2 miteinander resolviert werden können, und geben Sie die Definition der Menge der Resolventen von C_1 und C_2 an.

(iii) Sei C eine Resolvente von C_1, C_2. Beweisen Sie, dass $\{C_1, C_2\} \models C$.

(iv) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolution, dass die folgende Formel unerfüllbar ist.

$$(A \vee C) \wedge (\neg C \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee D) \wedge (D \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg D) \wedge (A \vee \neg D).$$

Lösung zu Aufgabe 5

(ii) Zwei Klauseln C_1, C_2 können resolviert werden, wenn es ein $L \in C_1$ mit $\overline{L} \in C_2$ gibt. Hierbei kann L ein positives oder negatives Literal sein.

Im zweiten Teil der Aufgabe ist nach der Menge $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$ gefragt. Eine einzige Resolvente angeben genügt also nicht. Eine mögliche Antwort ist

$$\mathrm{Res}(C_1, C_2) := \big\{ \big(C_1 \setminus \{L\}\big) \cup \big(C_2 \setminus \{\overline{L}\}\big) \mid L \in C_1 \text{ und } \overline{L} \in C_2 \big\}$$

oder ausführlicher

$$\mathrm{Res}(C_1, C_2) := \big\{C \mid \text{Es gibt ein } L \in C_1 \text{ mit } \overline{L} \in C_2 \text{ und } C = \big(C_1 \setminus \{L\}\big) \cup \big(C_2 \setminus \{\overline{L}\}\big)\big\}\,.$$

Aufgabe 6 7+8=15 Punkte

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(i) Geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, sodass es genau eine Belegung $\beta : \{X_1, \ldots, X_n\} \to \{0,1\}$ gibt mit $\beta \models \varphi$.

(ii) Geben sie eine aussagenlogische Formel φ an mit $\mathrm{var}(\varphi) \subseteq \{X_1, \ldots, X_n\}$, sodass es genau 2^{n-1} verschiedene Belegungen $\beta : \{X_1, \ldots, X_n\} \to \{0,1\}$ gibt mit $\beta \models \varphi$.

Begründen Sie ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 6

(i) Zum Beispiel $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} X_i$ ist wahr genau dann, wenn alle X_i mit 1 belegt werden.

(ii) Zum Beispiel $\varphi = X_1$ ist wahr genau dann, wenn X_1 auf 1 abgebildet wird. Es gibt insgesamt 2^n verschiedene Belegungen, genau bei der Hälfte davon wird X_1 auf 1 abgebildet. Die Hälfte ist genau die gesuchte Zahl 2^{n-1}.

Aufgabe 7 10 Punkte

Ein unendlicher Graph $G := (V, E)$ besteht aus einer unendlichen Knotenmenge V und einer Kantenmenge $E \subseteq \{\{u, v\} : u \neq v, u, v \in V\}$. G ist 2-färbbar, wenn es eine Funktion $c : V \to \{0,1\}$ gibt, so dass $c(u) \neq c(v)$ für alle Kanten $\{u, v\} \in E$.

Zeigen Sie, dass ein unendlicher Graph genau dann 2-färbbar ist, wenn bereits jeder endliche Untergraph 2-färbbar ist.