Prof. Dr. Stephan Kreutzer
FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin

WS 13/14

2. Teilleistung TheGI 3

27. Februar 2014

Name, Vorname: ______________________________

Studiengang (Bsc/Msc/Dipl Inf/Math/...): ______________________________

Versuch-Nr.: ______________ Matrikel-Nr.: ______________

Los-Nr.: [ ]

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7
Punkte:							

Summe: **Note:**

Punkte: Insgesamt sind in dieser Teilleistung 90 Punkte zu erreichen. Die Teilleistung gilt mit dem Erreichen von mindestens 50% der Punkte als bestanden.

Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 75 Minuten. Zusätzlich gibt es eine Einlesezeit von 15 Minuten.

Form der Abgabe: Bitte lassen Sie Ihr bereitgestelltes Papier geklammert.

Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Für die Antworten darf nur das bereitgestellte Papier verwendet werden.

Los-Nummer: Tragen Sie in das Feld „Los-Nr.“ die Ihnen ausgeteilte Nummer ein. Unter dieser Nummer finden Sie später Ihre erreichten Punkte und Ihre Note.

Diese Seite ist leer.

Aufgabe 1 10 Punkte

Bitte kreuzen Sie bei den folgenden Aussagen jeweils an, ob die Aussage stimmt oder ob sie nicht stimmt. Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede falsche Antwort 0 Punkte. Jede leere oder nicht eindeutig ausgefüllte Anwort gibt 0,5 Punkte.

σ ist in dieser Aufgabe eine beliebige Signatur und φ, ψ sind beliebige prädikatenlogische Formeln.

	Aussage	Wahr	Falsch
1.	$\neg\varphi = \psi$ ist eine prädikatenlogische Formel.	◯	◯
2.	Es gibt nur endlich viele endliche σ-Strukturen.	◯	◯
3.	Wenn $\forall x \varphi(x)$ allgemeingültig ist, dann ist $\exists x \varphi(x)$ allgemeingültig.	◯	◯
4.	Es gibt eine zu φ äquivalente Formel in Pränexnormalform.	◯	◯
5.	Wenn φ keine Quantoren enthält, ist φ eine aussagenlogische Formel.	◯	◯
6.	Mindestens eines von φ oder $\neg\varphi$ ist erfüllbar.	◯	◯
7.	Jeder bijektive Homomorphismus ist ein Isomorphismus.	◯	◯
8.	Jeder Isomorphismus ist ein bijektiver Homomorphismus.	◯	◯
9.	Jede gültige Sequenz besitzt eine Sequenzenkalkülableitung aus Axiomen.	◯	◯
10.	Elementar äquivalente Strukturen sind isomorph.	◯	◯

Aufgabe 2 7+7=14 Punkte

Betrachten Sie die Strukturen $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, A^{\mathbb{Z}})$ und $\mathcal{Q} := (\mathbb{Q}, A^{\mathbb{Q}})$, wobei A ein 3-stelliges Relationssymbol ist, das auf $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als die übliche Addition interpretiert wird. Das heißt

$$(x, y, z) \in A^{\mathbb{Z}} \iff x + y = z$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$ und analog für $A^{\mathbb{Q}}$.

(i) Geben Sie eine Gewinnstrategie für den Herausforderer für das 2-Rundenspiel $\mathcal{G}_2(\mathcal{Z}, \mathcal{Q})$ an. Geben Sie außerdem eine trennende Formel φ vom Quantorenrang 2 an.

(ii) Wir betrachten die Redukte $\mathcal{Z}|_\emptyset, \mathcal{Q}|_\emptyset$ von $\mathcal{Z}, \mathcal{Q}$ auf die leere Signatur. Welcher Spieler gewinnt $G(\mathcal{Z}|_\emptyset, \mathcal{Q}|_\emptyset)$ und warum?

Aufgabe 3 2+9=11 Punkte

(i) Definieren Sie, was Axiome im Sequenzenkalkül sind.

(ii) Sei σ eine Signatur, die mindestens die Konstante c enthält, und sei $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$. Beweisen Sie mit dem Sequenzenkalkül die Allgemeingültigkeit von

$$\neg c = c \to \varphi.$$

Beachten Sie bitte: Falls Sie eine der Substitutionsregeln ($S\Rightarrow$) oder ($\Rightarrow S$) verwenden, müssen Sie angeben, was $\psi(x)$, t und t' im Kontext dieser Regel sind.

Aufgabe 4 7+7=14 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Regeln.

(i) $\dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}$

(ii) $\dfrac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$

Aufgabe 5 5+5+5=15 Punkte

Sei $\sigma = \{+, \cdot, Z\}$ eine Signatur mit zwei 2-stelligen Funktionssymbolen $+, \cdot$ und einem 1-stelligen Relationssymbol Z.

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathcal{R}}, \cdot^{\mathcal{R}}, Z^{\mathbb{R}})$ die Struktur reellen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation und $Z^{\mathbb{R}} := \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Geben Sie Formeln $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ an, sodass gilt

(i) $\varphi_1(\mathcal{R}) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\big\}$,

(ii) $\varphi_2(\mathcal{R}) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\}$,

(iii) $\varphi_3(\mathcal{R}) = \mathbb{Q}$.

Sie müssen Ihre Antworten in dieser Aufgabe nicht begründen.

Aufgabe 6 10 Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit einer 2-stelligen Relation und sei $\mathcal{C}$ die Klasse der endlichen σ-Strukturen, die ungerichtete, schlaufenfreie Graphen sind. Sei K_3 der vollständige Graph mit 3 Knoten.

Zeigen Sie, dass die Klasse der Graphen, die keinen K_3 als Subgraph enthalten, in $\mathcal{C}$ endlich axiomatisierbar ist.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7 8+8=16 Punkte

Sei $\sigma := \{+, \cdot, 0, 1\}$ eine Signatur mit zwei 2-stelligen Funktionssymbolen $+, \cdot$ und zwei Konstanten $0, 1$. Wir betrachten die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als σ-Strukturen, interpretiert auf die natürliche Weise.

(i) Wie viele Isomorphismen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ gibt es?

(ii) Wie viele Isomorphismen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt es? Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 5.i.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Regeln des prädikatenlogischen Sequenzenkalküls

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$

$(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

$(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$

$(\forall\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\forall)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}\ (*)$

$(\exists\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}\ (*)$ $\qquad (\Rightarrow\exists)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)}$

$(S\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow S)\ \dfrac{\Phi, \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$ $\qquad (=)\ \dfrac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$

$(*)$ wobei c ein nicht in Φ, Δ oder $\psi(x)$ vorkommendes Konstantensymbol ist.

In den Regeln steht t für einen beliebigen Term.