Prof. Dr. Stephan Kreutzer
FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin

WS 13/14

2. Teilleistung TheGI 3

27. Februar 2014

Name, Vorname: ____________________

Studiengang (Bsc/Msc/Dipl Inf/Math/. . .): ____________________

Versuch-Nr.: ____________________ Matrikel-Nr.: ____________________

Los-Nr.: [   ]

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7
Punkte:							

Summe: **Note:**

Punkte: Insgesamt sind in dieser Teilleistung 90 Punkte zu erreichen. Die Teilleistung gilt mit dem Erreichen von mindestens 50% der Punkte als bestanden.

Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 75 Minuten. Zusätzlich gibt es eine Einlesezeit von 15 Minuten.

Form der Abgabe: Bitte lassen Sie Ihr bereitgestelltes Papier geklammert.

Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Für die Antworten darf nur das bereitgestellte Papier verwendet werden.

Los-Nummer: Tragen Sie in das Feld „Los-Nr.“ die Ihnen ausgeteilte Nummer ein. Unter dieser Nummer finden Sie später Ihre erreichten Punkte und Ihre Note.

Diese Seite ist leer.

Aufgabe 1 10 Punkte

Bitte kreuzen Sie bei den folgenden Aussagen jeweils an, ob die Aussage stimmt oder ob sie nicht stimmt. Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede falsche Antwort 0 Punkte. Jede leere oder nicht eindeutig ausgefüllte Anwort gibt 0,5 Punkte.

σ ist in dieser Aufgabe eine beliebige Signatur und φ, ψ sind beliebige prädikatenlogische Formeln.

	Aussage	Wahr	Falsch
1.	$\neg\varphi = \psi$ ist eine prädikatenlogische Formel.	◯	⊗
2.	Es gibt nur endlich viele endliche σ-Strukturen.	◯	⊗
3.	Wenn $\forall x\varphi(x)$ allgemeingültig ist, dann ist $\exists x\varphi(x)$ allgemeingültig.	⊗	◯
4.	Es gibt eine zu φ äquivalente Formel in Pränexnormalform.	⊗	◯
5.	Wenn φ keine Quantoren enthält, ist φ eine aussagenlogische Formel.	◯	⊗
6.	Mindestens eines von φ oder $\neg\varphi$ ist erfüllbar.	⊗	◯
7.	Jeder bijektive Homomorphismus ist ein Isomorphismus.	◯	⊗
8.	Jeder Isomorphismus ist ein bijektiver Homomorphismus.	⊗	◯
9.	Jede gültige Sequenz besitzt eine Sequenzenkalkülableitung aus Axiomen.	⊗	◯
10.	Elementar äquivalente Strukturen sind isomorph.	◯	⊗

Aufgabe 2 7+7=14 Punkte

Betrachten Sie die Strukturen $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, A^{\mathbb{Z}})$ und $\mathcal{Q} := (\mathbb{Q}, A^{\mathbb{Q}})$, wobei A ein 3-stelliges Relationssymbol ist, das auf $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als die übliche Addition interpretiert wird. Das heißt

$$(x, y, z) \in A^{\mathbb{Z}} \quad \Longleftrightarrow \quad x + y = z$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$ und analog für $A^{\mathbb{Q}}$.

(i) Geben Sie eine Gewinnstrategie für den Herausforderer für das 2-Rundenspiel $\mathcal{G}_2(\mathcal{Z}, \mathcal{Q})$ an. Geben Sie außerdem eine trennende Formel φ vom Quantorenrang 2 an.

(ii) Wir betrachten die Redukte $\mathcal{Z}|_\emptyset, \mathcal{Q}|_\emptyset$ von $\mathcal{Z}, \mathcal{Q}$ auf die leere Signatur. Welcher Spieler gewinnt $G(\mathcal{Z}|_\emptyset, \mathcal{Q}|_\emptyset)$ und warum?

Lösung zu Aufgabe 2

(i) Im ersten Zug spielt Herausforderer auf $a_1 := 1 \in \mathcal{Z}$, Duplikatorin antwortet mit $b_1 \in \mathcal{Q}$. Im nächsten Schritt spielt Herausforderer auf $b_2 := b_1/2 \in \mathcal{Q}$. Duplikatorin kann nicht korrekt antworten, weil es kein $z \in \mathcal{Z}$ gibt mit $z + z = 1 = a_1$, aber es gilt $b_2 + b_2 = b_1$.

Eine trennende Formel ist $\varphi := \forall x \exists y(y + y = x)$.

(ii) Duplikatorin gewinnt $G(\mathcal{Z}|_\emptyset, \mathcal{Q}|_\emptyset)$. Die beiden Strukturen $\mathcal{Z}|_\emptyset$ und $\mathcal{Q}|_\emptyset$ sind isomorph, weil sie gleichmächtig sind und die Signatur leer ist.

Aufgabe 3 2+9=11 Punkte

(i) Definieren Sie, was Axiome im Sequenzenkalkül sind.

(ii) Sei σ eine Signatur, die mindestens die Konstante c enthält, und sei $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$. Beweisen Sie mit dem Sequenzenkalkül die Allgemeingültigkeit von

$$\neg c = c \to \varphi.$$

Beachten Sie bitte: Falls Sie eine der Substitutionsregeln $(S\Rightarrow)$ oder $(\Rightarrow S)$ verwenden, müssen Sie angeben, was $\psi(x)$, t und t' im Kontext dieser Regel sind.

Lösung zu Aufgabe 3

(i) Eine Sequenz $\Phi \Rightarrow \Delta$ ist ein Axiom genau dann, wenn $\Phi \cap \Delta \neq \emptyset$.

(ii)

$$\begin{array}{r} \\ (=) \\ (\neg\Rightarrow) \\ (\Rightarrow\rightarrow) \end{array} \begin{array}{c} \hline \{c = c\} \Rightarrow \{c = c, \varphi\} \\ \hline \emptyset \Rightarrow \{c = c, \varphi\} \\ \hline \{\neg c = c\} \Rightarrow \{\varphi\} \\ \hline \emptyset \Rightarrow \{\neg c = c \rightarrow \varphi\} \end{array} \text{ mit } t := c$$

Aufgabe 4 — 7+7=14 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Regeln.

(i) $\dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}$

(ii) $\dfrac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$

Lösung zu Aufgabe 4

(i) Diese Regel ist korrekt.

Angenommen $\Phi \Rightarrow \Delta$ ist gültig. Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Phi \cup \{\psi\}$. Dann gilt insbesondere $\mathcal{I} \models \Phi$. Aus der Gültigkeit von $\Phi \Rightarrow \Delta$ folgt, dass es ein $\delta \in \Delta$ gibt mit $\mathcal{I} \models \delta$. Dies zeigt die Gültigkeit von $\Phi, \psi \Rightarrow \Delta$.

(ii) Diese Regel ist nicht korrekt.

Sei $\sigma = \{c, d\}$ eine Signatur mit zwei Konstantensymbolen, $\Phi := \emptyset$, $\psi := (c = d)$ und $\Delta := \{\psi\}$. Dann ist die obere Sequenz gültig, weil sie ein Axiom ist, die untere jedoch ungültig, weil $c = d$ nicht allgemeingültig ist.

Aufgabe 5 — 5+5+5=15 Punkte

Sei $\sigma = \{+, \cdot, Z\}$ eine Signatur mit zwei 2-stelligen Funktionssymbolen $+$, $\cdot$ und einem 1-stelligen Relationssymbol Z.

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathcal{R}}, \cdot^{\mathcal{R}}, Z^{\mathbb{R}})$ die Struktur reellen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation und $Z^{\mathbb{R}} := \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Geben Sie Formeln $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ an, sodass gilt

(i) $\varphi_1(\mathcal{R}) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\big\}$,

(ii) $\varphi_2(\mathcal{R}) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\}$,

(iii) $\varphi_3(\mathcal{R}) = \mathbb{Q}$.

Sie müssen Ihre Antworten in dieser Aufgabe nicht begründen.

Lösung zu Aufgabe 5

(i) $\varphi_1(x, y) := \exists z(x + (z \cdot z) = y)$.

(ii) $\varphi_2(x) := \exists y(Z(y) \wedge y + y = x)$.

(iii) $\varphi_3(x) := \exists y \exists z(Z(y) \wedge Z(z) \wedge \underbrace{\neg z + z = z}_{z \text{ ist nicht } 0} \wedge y = x \cdot z)$.

Diese Formel ist wahr genau dann, wenn es ganze Zahlen y, z gibt mit $z \neq 0$ und $x = \frac{y}{z}$. Das ist genau dann der Fall, wenn x eine rationale Zahl ist.

Aufgabe 6 10 Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit einer 2-stelligen Relation und sei $\mathcal{C}$ die Klasse der endlichen σ-Strukturen, die ungerichtete, schlaufenfreie Graphen sind. Sei K_3 der vollständige Graph mit 3 Knoten.

Zeigen Sie, dass die Klasse der Graphen, die keinen K_3 als Subgraph enthalten, in $\mathcal{C}$ endlich axiomatisierbar ist.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 6

$$\varphi := \neg \exists x_1 \cdots \exists x_3 \bigwedge_{i=1}^{3} \bigwedge_{j=i+1}^{3} E(x_i, x_j).$$

Diese Formel ist wahr, wenn es 3 Knoten gibt mit einer Kante zwischen jedem Paar von unterschiedlichen Knoten. Auf $x_i \neq x_j$ und auf die Kanten in beide Richtungen muss man nicht prüfen, weil $\mathcal{C}$ die Klasse der ungerichteten, schlaufenfreien Graphen ist.

Aufgabe 7 8+8=16 Punkte

Sei $\sigma := \{+, \cdot, 0, 1\}$ eine Signatur mit zwei 2-stelligen Funktionssymbolen $+, \cdot$ und zwei Konstanten $0, 1$. Wir betrachten die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als σ-Strukturen, interpretiert auf die natürliche Weise.

(i) Wie viele Isomorphismen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ gibt es?

(ii) Wie viele Isomorphismen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt es? Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 5.i.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 7

(i) Sei $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ein Isomorphismus. Zunächst stellen wir fest, dass $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ gelten muss.

Wenn für $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(n) = n$, dann gilt

$$f(n + 1) = f(n) + f(1) = n + 1.$$

Also gilt $f(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Induktion.

Sei $p, q \in \mathbb{N}$ mit $q \neq 0$. Dann ist

$$p = f(p) = f(p/q \cdot q) = f(p/q) \cdot f(q) = f(p/q) \cdot q,$$

also ist $f(p/q) = p/q$.

Wenn $f(x) = x$ gilt für ein $x \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, dann ist

$$0 = f(0) = f((-x) + x) = f(-x) + f(x) = f(-x) + x,$$

also ist $f(-x) = -x$ für alle $x \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Damit gilt $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Weil f beliebig gewählt war, zeigt dies, dass es nur einen einzigen Isomorphismus gibt.

(ii) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Isomorphismus. Weil $\mathbb{Q}$ eine Substruktur von $\mathbb{R}$ ist, folgt mit demselben Argument wie im vorigen Aufgabenteil, dass $g(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.

Sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{R}$ mit $y - x = r^2$. Dann gilt auch $g(r)^2 = g(y - x) = g(y) - g(x)$, also hat $g(y) - g(x)$ eine Quadratwurzel und ist damit nicht negativ, also gilt $g(x) \leq g(y)$. Der Isomorphismus g erhält also die Ordnung $\leq$.

Angenommen es gibt ein $a \in \mathbb{R}$, sodass $f(a) \neq a$. Dann ist $f(a) < a$ oder $f(a) > a$. Angenommen $f(a) < a$. Sei $b \in \mathbb{Q}$ mit $f(a) < b < a$. Dann gilt

$$0 < b - f(a) = f(b) - f(a) = f(b - a) < f(0) = 0,$$

was ein Widerspruch ist. Die Identität ist damit der einzige Isomorphismus $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Regeln des prädikatenlogischen Sequenzenkalküls

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$

$(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

$(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$

$(\forall\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\forall)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}\ (*)$

$(\exists\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}\ (*)$ $\qquad$ $(\Rightarrow\exists)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)}$

$(S\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow S)\ \dfrac{\Phi, \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$ $\qquad$ $(=)\ \dfrac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$

$(*)$ wobei c ein nicht in Φ, Δ oder $\psi(x)$ vorkommendes Konstantensymbol ist.

In den Regeln steht t für einen beliebigen Term.