Aufgabe 1

10 Punkte

Bitte kreuzen Sie bei den folgenden Aussagen jeweils an, ob die Aussage stimmt oder ob sie nicht stimmt.

Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede falsche Antwort, sowie jedes nicht angekreuzte Feld, gibt 0 Punkte.

φ, ψ, χ sind beliebige aussagenlogische Formeln und Φ, Ψ sind beliebige Mengen von aussagenlogischen Formeln.

	Aussage	Wahr	Falsch	
1.	Wenn φ erfüllbar ist, dann ist $\neg\varphi$ unerfüllbar.	○	X ✓	
2.	Wenn φ unerfüllbar ist, dann ist $\neg\varphi$ eine Tautologie.	X ✓	○	
3.	$X \rightarrow (\neg Z \wedge (Y \vee Z))$ ist erfüllbar.	○	X f	−1
4.	$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \equiv \psi \vee (\varphi \vee \chi)$.	X ✓	○	
5.	Es gibt genau 2^n nicht-äquivalente aussagenlogische Formeln, die genau die Variablen $X_1, \dots, X_n$ enthalten.	X f	○	−1
6.	Man benötigt höchstens 2^n Resolutionsschritte, um aus einer unerfüllbaren Klauselmenge mit den Variablen $X_1, \dots, X_n$ die leere Klausel abzuleiten.	X ✓	○	
7.	φ kann in Polynomialzeit in eine äquivalente Formel in KNF umgewandelt werden.	X f	○	−1
8.	Das Erfüllbarkeitsproblem für aussagenlogische Formeln in KNF ist NP-vollständig.	X ✓	○	
9.	Φ ist genau dann erfüllbar, wenn bereits eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar ist.	○	X ✓	
10.	Wenn Φ endlich ist, dann ist Φ erfüllbar.	○	X ✓	

7/10

Aufgabe 2

2+4+4+5+5=20 Punkte

Seien Φ, Ψ Mengen von aussagenlogischen Formeln und seien φ, ψ aussagenlogische Formeln.

(i) Definieren Sie den Folgerungsbegriff $\Phi \models \varphi$.

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(ii) Es existiert eine Formelmenge Φ mit $\Phi \models \varphi$ für alle $\varphi \in \mathrm{AL}$.

(iii) Wenn $\Phi \models \varphi$ und $\Psi \models \varphi$, dann $\Phi \cup \Psi \models \varphi$.

(iv) Wenn $\Phi \models \varphi$ und $\Psi \models \psi$, dann $\Phi \cap \Psi \models \varphi \wedge \psi$.

(v) $\Phi \models \varphi$ genau dann, wenn $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar ist.

Lösung zu Aufgabe 2

(i) $\Phi \models \varphi$ genau dann, wenn für jede zu Φ und φ passende Belegung β gilt $\beta \models \Phi \Longrightarrow \beta \models \varphi$. Dabei bedeutet $\beta \models \Phi$, dass $\beta \models \psi$ für alle $\psi \in \Phi$.

(ii) Wahr. Wähle $\Phi = \{X, \neg X\}$. Sei $\varphi \in \mathrm{AL}$ beliebig. Dann existiert keine Belegung β mit $\beta \models \Phi$ und $\beta \not\models \varphi$. Also gilt $\Phi \models \varphi$.

(iii) Wahr. Annahme: $\Phi \models \varphi$ und $\Psi \models \psi$. Sei β eine zu $\Phi \cup \Psi$ und φ passende Belegung. Aus $\beta \models \Phi \cup \Psi$ folgt $\beta \models \Phi$, also nach Annahme $\beta \models \varphi$. Also gilt $\Phi \cup \Psi \models \varphi$.

(iv) Falsch. Sei $\Phi = \{X \wedge X\}$, $\Psi = \{X\}$ und $\varphi = \psi = X$. Damit gilt $\Phi \models \varphi$ und $\Psi \models \psi$. Außerdem gilt $\Phi \cap \Psi = \emptyset$ und $\emptyset$ ist allgemeingültig. Aber $\varphi \wedge \psi = X \wedge X \equiv X$ ist nicht allgemeingültig. Also gilt $\Phi \cap \Psi \not\models \varphi \wedge \psi$.

(v) Wahr. $\Rightarrow$: Annahme: $\Phi \models \varphi$. Zu zeigen $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ist unerfüllbar. Angenommen, es gäbe ein β mit $\beta \models \Phi \cup \{\neg\varphi\}$. Dann gilt insbesondere auch $\beta \models \Phi$. Nach Annahme folgt $\beta \models \varphi$. Doch nach der Annahme über β gilt auch $\beta \models \neg\varphi$, was ein Widerspruch ist. Da also kein solches β existiert, ist $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar.

$\Leftarrow$: Annahme $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ist unerfüllbar. Zu zeigen $\Phi \models \varphi$. Falls Φ unerfüllbar, so gilt die Aussage. Sonst sei β eine beliebige zu φ passende Belegung mit $\beta \models \Phi$. Wäre $\beta \models \neg\varphi$, dann wäre β eine erfüllende Belegung für $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$, was nach Annahme nicht sein kann. Also folgt $\beta \not\models \neg\varphi$ und somit $\beta \models \varphi$. Damit ist $\Phi \models \varphi$ gezeigt.

Aufgabe 3

3 Punkte

Geben Sie die Formel φ an, die in der folgenden Wahrheitstabelle kodiert ist.

X_1	X_2	X_3	X_4	φ
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Lösung zu Aufgabe 3

Wir beobachten, dass φ genau dann zu wahr auswertet, wenn X_2 zu falsch auswertet, außer, wenn X_1, X_2 und X_4 zu falsch und X_3 zu wahr auswertet. Also ist die Formel, die durch die Wahrheitstabelle kodiert wird, äquivalent zu $\neg X_2 \wedge \neg(\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3 \wedge \neg X_4)$.

Aufgabe 4

5+5+5=15 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzen.

(i) $(Y \to Z) \to X \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Z)$.

(ii) $(X \to Y) \to Z \equiv (Z \to Y) \to X$.

(iii) $(\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \equiv Z \wedge \neg(X \wedge Y \wedge Z)$.

Lösung zu Aufgabe 4

(i) Gilt. $(Y \to Z) \to X \equiv \neg(\neg Y \vee Z) \vee X \equiv (Y \wedge \neg Z) \vee X \equiv (Y \vee X) \wedge (\neg Z \vee X) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Z)$.

(ii) Gilt nicht. Wähle z.B. β mit $\beta(X) = 1, \beta(Y) = 1, \beta(Z) = 0$.

(iii) Gilt. Wir betrachten die Wahrheitstabelle der Formeln. $\varphi_1 := (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z)$, $\varphi_2 := Z \wedge \neg(X \wedge Y \wedge Z)$

X	Y	Z	φ_1	φ_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

Aufgabe 5

3+2+7+11=23 Punkte

(i) Seien C_1 und C_2 aussagenlogische Klauseln. Definieren Sie, was es bedeutet, dass C_1 und C_2 miteinander resolviert werden können, und geben Sie die Menge der Resolventen von C_1 und C_2 an.

(ii) Definieren Sie, was es bedeutet, dass der Resolutionskalkül korrekt ist.

(iii) Beweisen Sie, dass der Resolutionskalkül korrekt ist. Sie dürfen benutzen, dass $\{C_1, C_2\} \models C$, falls C eine Resolvente aus C_1 und C_2 ist.

(iv) Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls, dass die folgende Formel unerfüllbar ist.

$$(X_1 \vee X_2 \vee X_3) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee X_2)$$
$$\wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3) \wedge (X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3).$$

Lösung zu Aufgabe 5

(i) Zwei Klauseln C_1, C_2 können resolviert werden, wenn es ein $L \in C_1$ mit $\overline{L} \in C_2$ gibt. Hierbei kann L ein positives oder negatives Literal sein.

Im zweiten Teil der Aufgabe ist nach der Menge $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$ gefragt. Eine einzige Resolvente angeben genügt also nicht. Eine mögliche Antwort ist

$$\mathrm{Res}(C_1, C_2) := \{(C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{L}\}) \mid L \in C_1 \text{ und } \overline{L} \in C_2\}$$

oder ausführlicher

$$\mathrm{Res}(C_1, C_2) := \{C \mid \text{Es gibt ein } L \in C_1 \text{ mit } \overline{L} \in C_2 \text{ und } C = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{L}\})\}\,.$$

(ii) Falls die Klauselmenge erfüllbar ist, so kann die leere Klausel nicht abgeleitet werden.

(iii) Sei $M = \{C_1, \dots, C_n\}$ eine erfüllbare Menge von Klauseln. Wir zeigen, dass die leere Klausel nicht aus M abgeleitet werden kann. Per Induktion über die Zahl der Klauseln, die aus M abgeleitet werden können. Falls M unter Resolution abgeschlossen ist, so sind wir fertig, da keine weiteren Resolutionsschritte ausgeführt werden können und M die leere Klausel nicht enthält. Sonst seien C_1, C_2 Klauseln, so dass ein Literal $L \in C_1$ existiert mit $\overline{L} \in C_2$ und so dass $C = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{L}\})$ nicht in M vorkommt. Da M erfüllbar, existiert β mit $\beta \models M$. Da $\{C_1, C_2\} \models C$, gilt auch $\beta \models C$, insbesondere ist C nicht die leere Klausel. Weiterhin können aus $M \cup \{C\}$ weniger Klauseln abgeleitet werden als aus M und die Aussage folgt per Induktion.

(iv) Resolution.

Aufgabe 6

15 Punkte

Sei Φ eine Menge aussagenlogischer Formeln und sei φ eine aussagenlogische Formel. Der Kompaktheitssatz für die Aussagenlogik besagt

1) Φ ist erfüllbar genau dann, wenn jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar ist.
2) $\Phi \models \varphi$ genau dann, wenn eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ existiert mit $\Phi_0 \models \varphi$.

Beweisen Sie 1) $\Rightarrow$ 2) oder 2) $\Rightarrow$ 1).

Lösung zu Aufgabe 6

(i) 1) $\Rightarrow$ 2). Wenn eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ existiert mit $\Phi_0 \models \Phi$, so gilt auch $\Phi \models \varphi$ nach Definition der Folgerungsbeziehung. Umgekehrt gelte $\Phi \models \varphi$. Falls Φ unerfüllbar, so existiert nach 1) bereits eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$, die unerfüllbar ist. Dann gilt auch $\Phi_0 \models \varphi$. Anderenfalls ist $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar. Nach 1) ist bereits eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar ist. Dies impliziert $\neg\varphi \in \Phi_0$, da jede Teilmenge von Φ erfüllbar ist. Dies wiederum impliziert $\Phi_0 \models \varphi$.

(ii) 2) $\Rightarrow$ 1). Wenn Φ erfüllbar ist, so auch jede Teilmenge von Φ. Für die andere Richtung beobachte, dass Φ erfüllbar genau dann, wenn $\Phi \not\models \bot$. Nach 2) ist dies genau dann der Fall, wenn $\Phi_0 \not\models \bot$ für alle endlichen $\Phi_0 \subseteq \Phi$. $\Phi_0 \not\models \bot$ ist aber äquivalent zu Φ_0 erfüllbar. Dies beweist die Aussage.