Aufgabe 1

10 Punkte

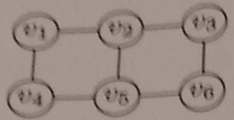
Bitte kreuzen Sie bei den folgenden Aussagen jeweils an, ob die Aussage stimmt oder ob sie nicht stimmt.

Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede falsche Antwort, sowie jedes nicht angekreuzte Feld, gibt 0 Punkte.

Sei σ eine beliebige endliche relationale Signatur. Seien $\Phi, \Delta \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ Mengen von Sätzen. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen mit Universen A, bzw. B.

Wie üblich lassen wir Klammern in Formeln weg, solange es eine eindeutige Lesung gibt.

		Wahr	Falsch
1.	Wenn Φ eine Klasse C von σ-Strukturen axiomatisiert, so axiomatisiert $\{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$ die die Komplementklasse $\{\mathcal{A} : \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur}\} \setminus C$.	○	⊗
2.	Jede endliche Klasse C von σ-Strukturen ist axiomatisierbar.	○	⊗
3.	Wenn Φ mindestens 2 nicht-isomorphe Modelle hat, so hat Φ unendlich viele nicht-isomorphe Modelle.	○	⊗
4.	Wenn $\mathcal{A} \not\equiv \mathcal{B}$, so gewinnt Herausforderer $\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.	○	⊗
5.	Wenn Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gewinnt, so gewinnt sie auch das Spiel $\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.	⊗	○
6.	Wenn für alle $a \in A, b \in B$ die Abbildung $a \mapsto b$ ein partieller Isomorphismus ist, so gilt $R^{\mathcal{A}} = \emptyset$ für alle 1-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$.	○	⊗
7.	Wenn $\emptyset \Rightarrow \Delta$ eine gültige Sequenz ist, so ist jede Formel $\delta \in \Delta$ allgemeingültig.	○	⊗
8.	Wenn $\lvert A \rvert$ endlich ist, so impliziert $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, dass $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.	⊗	○
9.	Wenn f ein bijektiver Homomorphismus ist, so ist auch die Umkehrabbildung f^{-1} ein Homomorphismus.	○	⊗
10.	Bis auf Äquivalenz gibt es nur endlich viele σ-Sätze.	○	⊗



$\mathcal{A}$

$\mathcal{B}$

(i) Bestimmen Sie das minimale $m \in \mathbb{N}$, so dass Herausforderer das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt.

(ii) Geben Sie eine Gewinnstrategie für Duplikatorin im Spiel $\mathfrak{G}_{m-1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ an (mit Begründung).

(iii) Geben Sie eine Gewinnstrategie für Herausforderer im Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ an (mit Begründung).

(iv) Geben Sie eine Formel φ mit Quantorenrang m an, sodass $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$ (ohne Begründung).

Lösung zu Aufgabe 2

(i) Das minimale m ist ~~[illegible]~~. 3

(ii) Im ersten Zug kann Duplikatorin mit einem beliebigen Element auf die Wahl von Herausforderer antworten. Seien nun $a_1 \in A$ und $b_1 \in B$ die nach der ersten Runde gewählten Elemente. O.B.d.A. wählt Herausforderer in der zweiten Runde ein Element $a_2 \in A$ (o.B.d.A. $a_2 \neq a_1$). Falls $\{a_1, a_2\} \in E^{\mathcal{A}}$, so wählt Duplikatorin ein Element $b_2 \in B$, so dass $\{b_1, b_2\} \in E^{\mathcal{B}}$. Falls $\{a_1, a_2\} \notin E^{\mathcal{A}}$, so wählt Duplikatorin ein Element $b_2 \in B$ mit $b_2 \neq b_1$, so dass $\{b_1, b_2\} \notin E^{\mathcal{B}}$. Eine solche Wahl ist offensichtlich immer möglich. Da gilt $(a_1, a_2) \in E^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow (b_1, b_2) \in E^{\mathcal{B}}$ handelt es sich um einen partiellen Isomorphismus und Duplikatoring gewinnt.

(iii) In den ersten zwei Runden wählt Herausforderer die Elemente $a_1 = v_1$ und $a_2 = v_6$ in A. Bezeichne mit b_1 und b_2 die Antwort von Duplikatorin in B. Die zwei Elemente b_1 und b_2 liegen in zwei Zeilen des 3×3-Gitters, das $\mathcal{B}$ beschreibt. Jedes dieser Elemente ist nur mit höchstens einem Element der Zeile verbunden, in der keines der Elemente b_1, b_2 liegt. Also existiert in $\mathcal{B}$ ein Element, dass nicht verbunden ist zu b_1 und b_2. In der dritten Runde wählt Herausforderer dieses Element als b_3. Duplikatorin kann kein $a_3 \in A$ mit dieser Eigenschaft wählen, denn a_1 und a_2 bilden eine dominierende Menge von $\mathcal{A}$. Es gilt also $(b_i, b_j) \notin E^{\mathcal{B}}$ für alle $1 \leq i, j \leq 3$, aber $(a_i, a_j) \in E^{\mathcal{A}}$ für mindestens ein Paar (i, j) mit $1 \leq i, j \leq 3$. Also ist die Abbildung $a_1 \mapsto b_1, \ldots, a_3 \mapsto b_3$ kein partieller Isomorphismus und Herausforderer gewinnt.

(iv) Eine trennende Formel ist $\exists x_1 \exists x_2 \forall y (E(x_1, y) \vee E(x_2, y) \vee y = x_1 \vee y = x_2)$.

Aufgabe 3

3+12=15 Punkte

(i) Definieren Sie den Begriff einer prädikatenlogischen Sequenz und geben Sie an, wann eine solche Sequenz gültig ist.

(ii) Beweisen Sie mit dem prädikatenlogischen Sequenzenkalkül, dass Funktionen, die überall denselben Wert annehmen, konstant sind. Das heißt, zeigen Sie die Gültigkeit der Sequenz

$$\forall x \forall y\ f(x) = f(y) \Rightarrow \exists y \forall x\ f(x) = y.$$

Bitte bedenken Sie, dass Sie im Sequenzenkalkül pro Ableitungsschritt nur eine Regel anwenden dürfen. Bitte geben Sie in jedem Schritt den Namen der angewendeten Regel an.

Falls Sie eine der Substitutionsregeln $(S\Rightarrow)$ oder $(\Rightarrow S)$ verwenden, dann geben Sie bitte an, was $\psi(x)$ im Kontext dieser Regel ist.

Lösung zu Aufgabe 3

(i) Eine Regel ist korrekt, wenn die Gültigkeit der oberen Sequenz (der Prämisse) die Gültigkeit der unteren Sequenz (der Konsequenz) impliziert.

(ii) Ein Beweisbaum für die angegebene Sequenz ist der folgende.

$$\begin{array}{rccc}
 & \overline{f(d) = f(c)} & \overline{\Rightarrow} & \overline{f(d) = f(c)} \\
(\forall\Rightarrow) & \overline{\forall y\ f(d) = f(y)} & \overline{\Rightarrow} & \overline{f(d) = f(c)} \\
(\forall\Rightarrow) & \overline{\forall x \forall y\ f(x) = f(y)} & \overline{\Rightarrow} & \overline{f(d) = f(c)} \\
(\Rightarrow\forall) & \overline{\forall x \forall y\ f(x) = f(y)} & \overline{\Rightarrow} & \overline{\forall x\ f(x) = f(c)} \\
(\Rightarrow\exists) & \overline{\forall x \forall y\ f(x) = f(y)} & \overline{\Rightarrow} & \overline{\exists y \forall x\ f(x) = y}
\end{array}$$

Aufgabe 4

15 Punkte

Beweisen Sie, dass die folgende Regel des Sequenzenkalküls nicht korrekt ist.

$$\frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x\, \psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

Beachten Sie, dass in der Regel $(\exists\Rightarrow)$ des Sequenzenkalküls gefordert wird, dass c nicht in Φ, Δ und ψ vorkommt.

Lösung zu Aufgabe 4

Wir wählen $\tau = \{R\}$, wobei R ein einstelliges Relationssymbol ist. Sei $\Phi = \emptyset$, $\psi(x) = R(x)$ und $\Delta = \{R(c)\}$. Dann ist $\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta$ gültig. Aber $\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta$ ist nicht gültig, denn z.B. die Struktur $\mathcal{A}$ mit $A = \{0,1\}$ und $R^{\mathcal{A}} = \{0\}$ und $c^{\mathcal{A}} = 1$ ist Modell von $\Phi \cup \{\exists x R(x)\}$ aber nicht von $R(c)$.

Sei $\sigma = \{+\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Funktionssymbol $+$. 2+8=10 Punkte

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathcal{R}})$ die Struktur der reellen Zahlen mit der üblichen Addition.

(i) Geben Sie eine Formel $\varphi_0(x)$ an, so dass $\varphi_0(\mathcal{R}) = \{0\}$.

(ii) Beweisen Sie, dass keine Formel φ_M existiert, so dass $\varphi_M(\mathcal{R}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \cdot y = z\}$.

Sie müssen Ihre Antworten in Aufgabenteil i) nicht begründen. Sie dürfen das Additionssymbol in Infix-Notation verwenden.

Sie dürfen das Isomorphielemma benutzen: Wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ σ-Strukturen mit Universen A bzw. B sind, und $\pi : A \to B$ ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist, so gilt für alle Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ und alle $a_1, \ldots, a_k \in A$, dass $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_k))$.

Lösung zu Aufgabe 5

(i) $\varphi_0(x) := x + x = x$.

(ii) Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\pi(x) = 2x$ ein Automorphismus von $\mathcal{R}$ ist. Dazu ist zu zeigen, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $(x,y,z) \in +^{\mathcal{R}} \Leftrightarrow (\pi(x), \pi(y), \pi(z)) \in +^{\mathcal{R}}$. Es gilt $(x,y,z) \in +^{\mathcal{R}} \Leftrightarrow x+y = z \Leftrightarrow 2x+2y = 2z \Leftrightarrow \pi(x)+\pi(y) = \pi(z) \Leftrightarrow (\pi(x), \pi(y), \pi(z)) \in +^{\mathcal{R}}$, was zu zeigen war.

Angenommen es existiert $\varphi_M(x,y,z)$, so dass $\varphi_M(\mathcal{R}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \cdot y = z\}$. Dann gilt nach Isomorphielemma $\mathcal{R} \models \varphi(1,1,1) \Leftrightarrow \mathcal{R} \models \varphi(\pi(1), \pi(1), \pi(1))$. Die rechte Seite der Äquivalenz impliziert $\pi(1) \cdot \pi(1) = \pi(1)$, Auswerten liefert $2 \cdot 2 = 2$. Dies gilt nicht, ein Widerspruch, der beweist, dass φ_M mit dieser Eigenschaft nicht existieren kann.