

2. Probeklausur TheGI 3

12. Februar 2014

Name, Vorname: _____

Studiengang (Bsc/Msc/Dipl Inf/Math/...): _____

Versuch-Nr.: _____ Matrikel-Nr.: _____

Los-Nr.:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7
Punkte:							

Summe:

Note:

Punkte: Insgesamt sind in dieser Teilleistung 65 Punkte zu erreichen. Die Teilleistung gilt mit dem Erreichen von mindestens 50% der Punkte als bestanden.

Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Form der Abgabe: Bitte lassen Sie Ihr bereitgestelltes Papier geklammert.

Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Für die Antworten darf nur das bereitgestellte Papier verwendet werden.

Los-Nummer: Tragen Sie in das Feld „Los-Nr.“ die Ihnen ausgeteilte Nummer ein. Unter dieser Nummer finden Sie später Ihre erreichten Punkte und Ihre Note.

Diese Seite ist leer.

Aufgabe 1

5 Punkte

Bitte kreuzen Sie bei den folgenden Aussagen jeweils an, ob die Aussage stimmt oder ob sie nicht stimmt.

Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede falsche Antwort 0 Punkte. Jede leere Antwort gibt 0,5 Punkte.

Sei $\sigma = \{c, f\}$ eine Signatur mit einer Konstanten c und einem 1-stelligen Funktionssymbol f und sei $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ beliebig.

	Aussage	Wahr	Falsch
1.	$\varphi \vee \neg\varphi$ ist erfüllbar.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	Das Allgemeingültigkeitsproblem der Prädikatenlogik ist entscheidbar.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	Isomorphe σ -Strukturen haben gleichmächtige Universen.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	Es gibt unendlich viele variablenfreie σ -Terme.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	$\exists x f(x) = c$ ist eine prädikatenlogische Formel.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Aufgabe 2

10 Punkte

Sei $\mathcal{M} = (\{0, 1\} \times \mathbb{N}, <^{\mathcal{M}})$, wobei für alle $(i, n), (i', n') \in \{0, 1\} \times \mathbb{N}$ gilt, dass

$$(i, n) <^{\mathcal{M}} (i', n') \text{ genau dann, wenn } i < i' \text{ oder wenn } i = i' \text{ und } n < n' \text{ gilt.}$$

Definieren Sie eine Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <^{\mathcal{N}})$, sodass \mathcal{M} isomorph zu \mathcal{N} ist.

Aufgabe 3

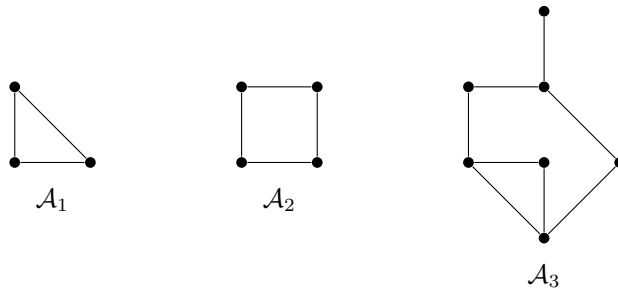
10 Punkte

Sei $\sigma = \{f\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist. Geben Sie einen erfüllbaren Satz $\varphi \in \text{FO}(\sigma)$ an, sodass alle Modelle von φ unendlich sind.

Aufgabe 4

10 Punkte

(i) Gegeben sind die folgenden Strukturen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ und prädikatenlogischen Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Entscheiden Sie für $1 \leq i, j \leq 3$, ob $\mathcal{A}_i \models \varphi_j$ gilt.



- $\varphi_1 = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 (E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_4) \wedge E(x_4, x_5) \wedge E(x_5, x_1))$.
- $\varphi_2 = \forall x \exists y_1 \exists y_2 \forall y_3 (y_1 \neq y_2 \wedge E(x, y_1) \wedge E(x, y_2) \wedge ((y_3 \neq y_1 \wedge y_3 \neq y_2) \rightarrow \neg E(x, y_3)))$.
- $\varphi_3 = \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow E(x, y))$.

Sie müssen Ihre Antwort in dieser Teilaufgabe nicht begründen.

- (ii) Gegeben sind die folgenden Strukturen $\mathcal{B}_1 = (\mathbb{N}, +, \cdot)$, $\mathcal{B}_2 = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $\mathcal{B}_3 = (\mathbb{C}, +, \cdot)$, wobei $+, \cdot$ 2-stellige Funktionssymbole mit den üblichen Interpretationen auf den entsprechenden Strukturen sind. Geben Sie Formeln ψ_1, ψ_2, ψ_3 an, sodass gilt $\mathcal{B}_i \models \psi_j$ genau dann, wenn $i = j$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5

10 Punkte

Sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ die Struktur der natürlichen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation. Geben Sie für $i \in \{1, \dots, 4\}$ Formeln φ_i an, sodass gilt:

- (i) $\varphi_1(\mathcal{N})$ ist die Menge der Quadratzahlen.
- (ii) $\varphi_2(\mathcal{N})$ ist die Menge der Paare (x, x^2) mit $x \in \mathbb{N}$.
- (iii) $\varphi_3(\mathcal{N})$ ist die Menge der Zahlen, die größer als 10 sind.

Aufgabe 6

10 Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur der Graphen. Wir betrachten die Strukturen

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (A, E^{\mathcal{A}}) & \mathcal{B} &= (B, E^{\mathcal{B}}) \\ A &:= \mathbb{N} & B &:= \{0, 1\} \times \mathbb{N} \\ E^{\mathcal{A}} &:= \{(x, y) \in A^2 \mid x < y\} & E^{\mathcal{B}} &:= \{((i, x), (j, y)) \in B^2 \mid i < j \text{ oder } (i = j \text{ und } x < y)\}. \end{aligned}$$

Welcher Spieler gewinnt $\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und mit welcher Strategie? Sind \mathcal{A} und \mathcal{B} isomorph?

Aufgabe 7

10 Punkte

Wir betrachten die Signatur $\sigma = \{f, c\}$ mit einem 1-stelligen Funktionssymbol f und einem Konstantensymbol c . Beweisen Sie mit dem Sequenzkalkül die Sequenz

$$\{\forall x f(x) = x\} \Rightarrow \{f(f(c)) = c\}.$$

Beachten Sie bitte: Falls Sie eine der Substitutionsregeln ($S \Rightarrow$) oder ($\Rightarrow S$) verwenden, müssen Sie angeben, was $\psi(x)$, t und t' im Kontext dieser Regel sind.

Regeln des prädikatenlogischen Sequenzenkalküls

$$(\neg\Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\neg) \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge\Rightarrow) \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\wedge) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee\Rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\vee) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow) \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

$$(\forall\Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x\psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\forall) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x\psi(x)} \quad (*)$$

$$(\exists\Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x\psi(x) \Rightarrow \Delta} \quad (*)$$

$$(\Rightarrow\exists) \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x\psi(x)}$$

$$(S\Rightarrow) \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \quad (\Rightarrow S) \frac{\Phi, \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')} \quad (=) \frac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$$

(*) wobei c ein nicht in Φ, Δ oder $\psi(x)$ vorkommendes Konstantensymbol ist.

In den Regeln steht t für einen beliebigen Term.